Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen WS 2011/12

Analysis III : Übungsblatt 1

Dr. Sebastian Heller 13. Oktober 2011

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 25. Oktober vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Die Menge aller reellen Zahlen, in deren Dezimaldarstellung die Ziffer 2 vorkommt, ist Borel–messbar.

Aufgabe 2. Jede der folgenden Mengen erzeugt die Borel–σ–Algebra des $\mathbb{R}^n$:

- die Menge der abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$,
- die Menge der kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$,
- die Menge der halboffenen Quader in $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3. Jede monotone Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Borel–messbar.

Aufgabe 4. Sei Ω eine überabzählbare Menge. Zeigen Sie, daß

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega \mid A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar }\}$$

eine σ–Algebra ist und

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ abzählbar} \\ 1 & \text{falls } A^c \text{ abzählbar} \end{cases}$$

ein Maß auf $\mathcal{A}$ definiert.