Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen WS 2011/12

Analysis III : Übungsblatt 5

Dr. Sebastian Heller 10. November 2011

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 22. November vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

i) Eine Regelfunktion f auf einem kompakten Intervall ist auch Lebesgue–integrierbar und beide Integrale von f sind gleich.
ii) Eine Regelfunktion f auf einem nicht kompakten Intervall ist genau dann Lebesgue–integrierbar, wenn das uneigentliche Regelintegral von $|f|$ existiert. Das uneigentliche Regelintegral von f stimmt dann mit dem Lebesgue–Integral überein.

(Erinnerung: eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *Regelfunktion*, wenn Sie auf jedem kompakten Teilintervall gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximiert werden kann. Ist I kompakt, so ist das *Regelintegral* einer Regelfunktion f definiert als der Limes der Integrale einer auf I gleichmäßig approximierenden Folge von Treppenfunktionen. Ist I nicht kompakt, so ist das *uneigentliche Regelintegral* falls existent definiert als die Summe der Grenzwerte der Regelintegrale über $[a_n, b]$ und $[b, c_n]$, wobei $a_n < b < c_n$ in I liegen und a_n, c_n gegen die Intervallgrenzen bzw. $\mp\infty$ konvergieren. Vgl. Königsberger oder Ferus Analysis I)

Aufgabe 2. Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, daß für $a > 0$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2/2} e^{-ixt} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-t^2/2a}.$$

Es reicht, den Fall $a = 1$ zu betrachten. (Den allgemeinen Fall kann man durch eine lineare Koordinatentransformation zeigen.)

i) Zeigen Sie, daß $g(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} e^{-ixt} dx$ existiert und differenzierbar ist und der Differentialgleichung $g'(t) = -tg(t)$ genügt.
ii) Folgern Sie die Aussage im Fall $a = 1$. (Benutzen Sie $g(0) = \sqrt{2\pi}$, das werden Sie auf dem nächsten Blatt zeigen.)

Aufgabe 3. Ist f eine C^k–Funktion mit kompakten Täger auf $\mathbb{R}^3$ und

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{\|x - y\|} d^3y,$$

wobei $\|.\|$ die Euklidische Norm und d^3y das Lebesgue–Maß bezeichnet. Zeigen Sie, daß u ebenfalls C^k ist und berechnen Sie $D^\alpha u$ für alle Multiindizes mit $|a| \leq k$. (Tip: Benutzen Sie, daß die Koordinatentransformation $\xi = y - x$ das Integral nicht ändert. Das folgt aus der sog. Transformationsformel, vgl. Vorlesung nächste Woche, bzw. auch leicht direkt aus der Translationsinvarianz des Maßes.)

Aufgabe 4. Man Zeige:

i) Die Γ–Funktion ist beliebig oft differenzierbar und es gilt
$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} (\ln t)^n dt$$
für $n \in \mathbb{N}$ (wobei $n = 0$ die Definition von Γ liefert).

ii) Die Funktion
$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} dt = 1/x$$
kann man beliebig oft unter dem Integral differenzieren. Folgern Sie die Formel:
$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-xt} dt = n!.$$

Aufgabe 5.* Zeigen Sie, daß
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty n^{-s}$$
für $s > 1$ stetig ist.