Analysis III : Übungsblatt 6

Dr. Sebastian Heller 17. November 2011

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 29. November vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx$. (Mittels Fubini können Sie dieses Integral auf das Doppelintegral $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2}dxdy$ zurückführen, welches man berechnen kann, indem man auf Polarkoordinaten transformiert.)

Aufgabe 2. Sei a_n, $n \in \mathbb{N}$ eine streng monotone Folge reeller Zahlen mit $a_0 = 0$ und Grenzwert 1. Sei ψ_n eine Folge stetiger reellwertiger Funktionen auf $[0,1]$ mit $\psi_n \geq 0$ und $\int \psi_n = 1$, so daß der Träger von ψ_n in $]a_n, a_{n+1}[$ liegt. Eine Funktion $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ sei definieret durch $f(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}}(\psi_n(x) - \psi_{n+1}(x))\psi_n(y)$. Berechnen Sie $\int_0^1(\int_0^1 f(x,y)dx)dy$ und $\int_0^1(\int_0^1 f(x,y)dy)dx$. Ist f integrierbar? Ist jede stetige reellwertige Funktion auf einem Kompaktum in $\mathbb{R}^2$ integrierbar?

Aufgabe 3. Die stetige Funktion

$$f\colon]0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2 < 1 \\ 1 & x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$$

ist integrierbar. Berechnen Sie das Integral über x für $y = 0$. Widerspricht das dem Satz von Fubini?

Aufgabe 4. Berechnen Sie Volumen und Trägheitsmoment um die x–Achse der folgenden Körper (d.h. integrieren Sie die Funktion $f(x,y,z) = 1$ bzw. $g(x,y,z) = y^2 + z^2$ über die Körper):

i) $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq a, y^2+z^2 \leq r^2\}$,
ii) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1\}$,
iii) $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid r^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$.