Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen WS 2011/12

Analysis III : Übungsblatt 7

Dr. Sebastian Heller 24. November 2011

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 6. Dezember vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Sei $f(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Berechnen Sie $f^*(\omega_1)$ und $f^*(\omega_2)$ für $\omega_1 = \frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{y}{x^2+y^2}dx$ und $\omega_2 = x\,dx + y\,dy$.

Aufgabe 2. Transformieren Sie die Form $\omega = dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$ auf Polarkoordinaten. Transformieren Sie die Form $\omega = dx \wedge dy \wedge dz \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$ auf sphärische Koordinaten und auf Zylinderkoordinaten.

Aufgabe 3. Berechnen Sie das äußere Differental der folgenden Formen:

a) $xy\,dx \wedge dy + 2x\,dy \wedge dz + 2y\,dx \wedge dz$
b) $z^2\,dx \wedge dy + (z^2 + 2y)\,dx \wedge dz$
c) $13x\,dx + y^2\,dy + xyz\,dz$
d) $e^x\cos(y)\,dx - e^x\sin(y)\,dy$
e) $x\,dy \wedge dz + y\,dx \wedge dz + z\,dx \wedge dy$

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß sich jede 2–Form $\omega \in \bigwedge^2(V^*)$ auf einem n–dimensionalen Vektorraum V in die Gestalt

$$\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 + ... + \alpha_{2r-1} \wedge \alpha_{2r}$$

bringen läßt, wobei α_1, ..., α_n eine Basis von V^* ist. Die Zahl r ist unabhängig von der Basis und durch die Bedingungen

$$\underbrace{\omega \wedge ... \wedge \omega}_{r-\text{mal}} \neq 0 \qquad \text{und} \qquad \underbrace{\omega \wedge ... \wedge \omega}_{r+1-\text{mal}} = 0$$

charakterisiert.