Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen WS 2011/12

Analysis III : Übungsblatt 8

Dr. Sebastian Heller 1. Dezember 2011

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 13. Dezember vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Ein Vektorfeld X auf $U \subset \mathbb{R}^3$ definiert eine 1–Form $\omega^1 = X \cdot d\vec{s}$ und eine 2–Form $\omega^2 = X \cdot d\vec{S}$. Zeigen Sie: $d\omega^1 = rot(X) \cdot d\vec{S}$ und $d\omega^2 = div(X) \cdot dV$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

i) Für ein Vektorfeld X und eine Funktion f auf $U \subset \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\mathrm{rot}(fX) = \mathrm{grad}(f) \times X + f\,\mathrm{rot}(X),$$
$$\mathrm{div}(fX) = \langle \mathrm{grad}(f), X \rangle + f\mathrm{div}(X).$$

(Tip: Nutzen Sie die Produktregel für die äußere Ableitung.)

ii) Seien $X_1(x, y, z) = (x, y, z)$ und $X_2(x, y, z) = (-y, x, 0)$. Finden Sie nicht–triviale Funktionen f_1 und f_2, die nur vom Abstand zum Nullpunkt bzw. zur z–Achse abhängen, so daß gilt

$$\mathrm{div}(f_1X_1) = 0 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{rot}(f_2X_2) = 0.$$

(Tip: die Funktionen können nicht auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert sein.)

iii) Berechnen Sie den Fluss von f_1X_1 durch die Einheitskugel und die Zirkulation von f_2X_2 entlang des Einheitskreises in der $z = 0$–Ebene. Warum widerspricht das Ergebnis nicht den Sätzen von Gauss bzw. Stokes?

Aufgabe 3. Seien $X_1(x, y, z) = \frac{1}{3}(x, y, z)$ und $X_2(x, y, z) = (1, 0, 0)$. Berechnen Sie den Fluß von X_1 und X_2 durch die Einheitssphäre einmal direkt und einmal über den Satz von Gauss.

Aufgabe 4. Seien wie oben $X_1(x, y, z) = \frac{1}{3}(x, y, z)$ und $X_2(x, y, z) = (1, 0, 0)$. Berechnen Sie, wie oben einmal direkt und einmal über den Satz von Gauss, den Fluß von X_1 und X_2 durch *i)* die Oberfläche eines Würfels mit Kantenlänge 2 und Zentrum 0 und *ii)* die Oberfläche eines Zylinders mit Höhe 2, Radius π und Zentrum 0.