Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen WS 2011/12

Analysis III : Übungsblatt 9

Dr. Sebastian Heller 8. Dezember 2011

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 20. Dezember vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. In $V = \mathbb{R}^n$ induzieren das Euklidische Skalarprodukt und die Determinante Isomorphismen zwischen V und $\bigwedge^1 V^*$ bzw. $\bigwedge^{n-1} V^*$: aus einem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ erhält man eine 1–Form ω^1 und eine $(n-1)$–Form ω^{n-1} durch

$$\omega^1 = \langle v, \_\rangle \qquad \text{und} \qquad \omega^{n-1} = \det(v, \_, ..., \_).$$

a) Bestimmen Sie die Transformation auf Vektoren des $\mathbb{R}^2$, die man erhält, wenn man erst aus einem Vektor mittels der Metrik eine 1–Form erzeugt und dann mittels der Determinante wieder einen Vektor.

b) Zeigen Sie, daß für $v,\, w \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$(v\, d\vec{s}) \wedge (w\, d\vec{s}) = (v \times w)\, d\vec{S}.$$

Aufgabe 2. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand und $\omega = \frac{1}{2}(x\,dy - y dx)$. Zeigen Sie, daß $\int_{\partial G} \omega$ gleich dem Flächeninhalt des Gebietes ist. Erklären Sie das Ergebnis, indem Sie im Falle eines polygonalen Randes den Wert der Integrale über die einzelnen Randstücke geometrisch Interpretieren. Skizzieren Sie den Fall eines Gebietes mit polygonalem Rand und $0 \notin G$.

Aufgabe 3. Sei $\omega \in \Omega^1(U)$, $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend. Zeigen Sie:

a) $d\omega = 0$ gilt genau dann, wenn $\int_{\partial G} \omega = 0$ für alle Gebiete G mit stückweise glattem Rand und $\bar{G} \subset U$.

b) Es gibt eine Funktion $f \in C^\infty(U) = \Omega^0(U)$ mit $\omega = df$ genau dann, wenn $\int_\gamma \omega = 0$ für alle geschlossenen Kurven γ in U.

Eine Form ω heißt *geschlossen* bzw. *exakt* falls $d\omega = 0$ bzw. $\omega = df$. Offenbar ist eine exakte Form immer geschlossen. Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 4. Untersuchen Sie, welches der beiden Vektorfelder

$$V(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2x + \sin(z) \\ \cos(y) - y\sin(y) \\ x\cos(z) + 4e^{2z} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad W(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2yz \\ z + x \end{pmatrix}$$

sich als Gradient einer Funktion schreiben läßt. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Funktion.