Analysis III : Übungsblatt 10

Dr. Sebastian Heller 20. Dezember 2011

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 10. Januar vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Bezeichne $Q = [0,1]^3$ den Quader mit Kantenlängen 1 und ∂Q den Rand des Quaders (nach Außen orientiert). Berechnen Sie das Integral der 2–Form $\omega = f(x,y,z)dy \wedge dz$ über ∂Q für folgende Funktionen

a) $f(x,y,z) = x$ *b)* $f(x,y,z) = x^2$ *c)* $f(x,y,z) = y$ *d)* $f(x,y,z) = xyz$.

Aufgabe 2. Sei M eine Menge mit einer differenzierbaren Struktur. Zeigen Sie: die induzierte Topologie auf M besitzt genau dann eine abzählbare Basis, wenn die differenzierbare Struktur durch einen abzählbaren Atlas repräsentiert werden kann.

Aufgabe 3.

a) Überlegen Sie, wie man das Produkt $M \times N$ zweier Mannigfaltigkeiten M, N wieder zu einer Mannigfaltigkeit machen kann.
b) Zeigen Sie: man kann $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ zu einer Mannigfaltigkeit machen, so daß die Projektion $p\colon \mathbb{R}^2 \to M$ differenzierbar ist und eine Abbildung $f\colon M \to N$ in eine Mannigfaltigkeit N genau dann differenzierbar ist, wenn $f \circ p$ differenzierbar ist.
c) Zeigen Sie, daß $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ diffeomorph zu $S^1 \times S^1$ ist.
d) Zeigen Sie, daß $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ diffeomorph zu einem Rotationstorus in $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 4. Sei Q eine nicht-ausgeartete quadratische Form auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß die Gruppe

$$O(Q) = \{A \in Gl(n,\mathbb{R}) \mid Q \circ A = Q\}$$

eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. Welche Dimension hat sie?