Analysis III : Übungsblatt 11

Dr. Sebastian Heller 20. Dezember 2011

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 17. Januar vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Sei $N \subset M$ Teilmenge einer Mannigfaltigkeit von Dimension m. Zeigen Sie:

a) N ist genau dann Untermannigfaltigkeit der Dimension n, wenn es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung O und eine Abbildung $f : O \to \mathbb{R}^{m-n}$ gibt, für die 0 ein regulärer Wert ist und
$$f^{-1}\{0\} = O \cap N.$$

b) N ist genau dann eine Untermannigfaltigkeit der Dimension n, wenn es für jeden Punkt p eine offene Umgebung O und eine Immersion $h : \tilde{O} \subset \mathbb{R}^n \to O \cap N$ gibt, welche ein Homöomorphismus auf ihr Bild $O \cap N$ ist.

Aufgabe 2. Man beweise, daß $S^n \times S^m$ zu einer Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+m+1}$ diffeomorph ist. (Tip: Zeigen Sie zuerst, daß $S^n \times \mathbb{R}$ zu $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ diffeomorph ist.)

Aufgabe 3. Wie transformieren sich die Komponenten eines Vektors des $\mathbb{R}^3$ von sphärischen in kartesische Koordinaten? Und wie von zylindrischen in kartesische Koordinaten?

Aufgabe 4. Sei $M = S^2$. Wie transformieren sich die Komponenten eines Tangentialvektors bezüglich sphärischer Koordinaten in die Koordinaten, die man erhält, wenn man die nördlichen Hemisphäre als Graph einer Funktion darstellt?