Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen SS 2012

Analysis IV : Übungsblatt 2

Wjatscheslaw Kewlin, Florian Schmidt 8. Mai 2012

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 22. Mai vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Es sei

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{(z-1-i)^2} \qquad \text{und} \qquad c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Man bestimme den Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

Aufgabe 2. Man berechne

$$\int_{|z-1|=2} \frac{\sin(z)}{z^4} dz.$$

Aufgabe 3. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und c, $r \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(z)| \le c|z|^n$$

für alle $|z| \ge r$. Man zeige, daß f ein Polynom höchstens n-ten Grades ist.

Aufgabe 4. Eine holomorphe Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ besitzt genau dann eine Stammfunktion auf ganz U, wenn für jede geschlossene stückweise C^1 Kurve γ in U gilt $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Aufgabe 5.* Sei f eine ganze Funktion, d.h., $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist eine holomorphe Funktion, die auf ganz $\mathbb{C}$ definiert ist. Ist f nicht konstant, so liegt $f(\mathbb{C})$ dicht.

Aufgabe 6.* Eine holomorphe Funktion auf einem sternförmigen Gebiet besitzt eine Stammfunktion. (Ein Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ heißt *sternförmig*, wenn es $z_0 \in U$ gibt, so daß für alle $z \in U$ gilt $\{tz + (1-t)z_0 \mid t \in [0,1]\} \subset U$.)