
 Analysis IV : Übungsblatt 3

Wjatscheslaw Kewlin, Florian Schmidt

22. Mai 2012

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 5. Juni vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Man zeige, daß jede biholomorphe Abbildung der offenen Einheitskreisscheibe auf sich selbst, die den Nullpunkt festläßt, eine Drehung ist.

Aufgabe 2. Sei $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine *reell analytische* Funktion, d.h., f läßt sich in jedem Punkt von I als Potenzreihe entwickeln. Man zeige, daß es eine holomorphe Funktion $g: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt mit $I = U \cap \mathbb{R}$ und $f = g|_I$. Kann man $U = \{z \mid |z| < 1\}$ wählen, wenn $I =]-1, 1[$?

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

- i) Die Funktion $f(z) = e^z$ ist überall lokal biholomorph.
- ii) Jede lokale Inverse $g(w)$ erfüllt $g'(w) = 1/w$.
- iii) Berechnen Sie durch Integration, daß die eindeutige Stammfunktion $l(w)$ von $1/w$ mit $l(1) = 0$ auf dem sternförmigen Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ gegeben ist durch

$$l(w) = \log |w| + \arg(w),$$

wobei \log der reelle Logarithmus ist und $\arg(e^{i\theta}) = \theta$ für $\theta \in]-\pi, \pi[$.
(Tip: integrieren Sie erst entlang des Einheitskreises und dann radial...)

- iv) Zeigen Sie anhand der obigen Formel und (nochmal) durch Integration, daß man l nicht auf \mathbb{C}_* fortsetzen kann.
- v) Berechnen Sie $f \circ l$ und $l \circ f$.
- vi) Berechnen Sie das Bild von $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ unter l .

Die Funktion l nennt man auch den *Hauptzweig des Logarithmus* und bezeichnet sie mit \log . (Wer alles geschafft hat bekommt hier **4 Bonuspunkte**).

Aufgabe 4. Untersuchen Sie die Art der Singularitäten der Funktionen $\frac{1}{1-e^z}$, $e^{1/z}$ und $\sin(z)/z$ im Punkt $z = 0$. Im Fall einer hebbaren Singularität bestimmen Sie den Funktionswert in $z = 0$. Im Fall eines Poles bestimmen Sie den Hauptteil. Im Fall einer wesentlichen Singularität berechnen Sie das Bild einer beliebig kleinen punktierten ϵ -Scheibe um $z = 0$.