Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen SS 2012

Analysis IV : Übungsblatt 6

Wjatscheslaw Kewlin, Florian Schmidt 3. Juli 2012

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 17. Juli vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Man berechne:

a)
$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+6x^2+13}dx$$

b)
$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x^2+a^2}dx, \qquad a>0$$

c)
$$\int_0^\infty \frac{x\sin(x)}{x^2+a^2}dx, \qquad a>0$$

d)
$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$$

(Hier gibt es insgesamt 8 Punkte.)

Aufgabe 2. Seien ω_1, $\omega_2 \in \mathbb{C}$ reell–linear unabhängig und f eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe doppelt periodische Funktion, d.h.,

$$f(z+\omega_1) = f(z+\omega_2) = f(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Man zeige, daß f auf dem "Fundamentalbereich"

$$F = \{\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \mid 0 \leq \lambda_i < 1\}$$

ebenso viele Polstellen wie Nullstellen hat (gezählt mit Vielfachheiten).

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

a) Sei γ eine geschlossene Kurve in $U \subset \mathbb{C}$, die eine Gebiet $G \subset U$ berandet, welches homöomorph zu einer Kreisschreibe ist. Sind $f,\ g\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und $|g(z)| < |f(z)|$ für alle z im Bild von γ, dann haben f und $f+g$ im Gebiet G dieselbe Anzahl von Nullstellen.

b) Benutzen Sie a) um den Fundamentalsatz der Algebra zu zeigen.

Aufgabe 4.* Zeigen Sie, daß sich $f(z) = \sum_{n=0}^\infty z^{n!}$ entlang von keiner Kurve, welche $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ verläßt, analytisch fortsetzen läßt.