Einführung in Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 3

Wjatscheslaw Kewlin 8. November 2012

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 15. November vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Welche der folgenden Mengen sind Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^2$:

a) $\{e^{it} = (\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$,
b) $\{(t, \sin(1/t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}$,
c) $\{(t, \sin(1/t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\} \cup \{(0, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$,
d) $\{(t^2, t^3) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$
e) $\{(\cos(t), \sin(2t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in (-\pi/2, \pi/2)\}$
f) $\{(\cos(t), \sin(2t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in (-\pi/2, \pi)\}$

Aufgabe 2. Welche der folgenden Mengen sind Untermannigfaltigkeiten des umgebenden Euklidischen Raumes? Welche besitzen eine Mannigfaltigkeitenstruktur, die kompatibel mit der vom umgebenden Euklidischen Raum induzierten Topologie ist?

a) $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
b) $M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1|, |x_2|, |x_3| \leq 1 \text{ und } |x_i| = 1 \text{ für ein i}\}$

Aufgabe 3. Seien N und M Mannigfaltigkeiten und $i\colon N \to M$ eine injektive Immersion. Ist i ein Homöomorphismus auf sein Bild $i(N)$, so ist $i(N)$ eine Untermannigfaltigkeit von M.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß $U(2)$ eine Mannigfaltigkeit und $SU(2) \subset U(2)$ eine Untermannigfaltigkeit ist. Zeigen Sie, daß die Gruppenoperationen glatte Abbildungen sind.

Aufgabe 5.*

a) Formulieren Sie den Satz über die Umkehrfunktion und den Satz über implizite Funktionen. Beweisen Sie, daß beide Sätze “äquivalent” sind.
b) Zeigen Sie, daß $N \subset M$ genau dann eine Untermannigfaltigkeit ist, wenn N sich in einer beliebigen Karte lokal (und nach eventueller Permutation der Koordinaten) als Graph eine glatten Abbildung schreiben läßt.