Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen WS 2012

Einführung in Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 4

Wjatscheslaw Kewlin 15. November 2012

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 22. November vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

a) Jede injektive Immersion einer kompakten Mannigfaltigkeit ist eine Einbettung.
b) $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (mit der differenzierbaren Struktur von Blatt 1) ist diffeomorph zu einem Rotationstorus in $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2. Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche. Zeigen Sie:

a) M ist genau dann orientierbar, wenn es eine differenzierbare Abbildung $n\colon M^n \to S^n$ gibt mit $T_pM = n(p)^\perp$ für alle $p \in M$.
b) Ist M eine abgeschlossen Teilmenge, so ist M orientierbar. (Benutzen Sie, daß $\mathbb{R}^{n+1}\backslash M$ zwei Komponenten hat, falls M zusammenhängend ist.)

Aufgabe 3. Realisieren Sie das Möbiusband explizit als Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, daß das Möbiusband nicht orientierbar ist.

Aufgabe 4. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{RP}^2 \cong S^2/\sim$, wobei $x \sim y$ falls $x = \pm y$. Die Menge $S^2/\sim$ sei hier mit der eindeutigen differenzierbaren Struktur versehen, bezüglich der die Projektion von S^2 ein lokaler Diffeomorphismus wird.
b) $\mathbb{RP}^2$ ist nicht orientierbar, da man ein Möbiusband in $\mathbb{RP}^2$ einbetten kann.
c) $\mathbb{RP}^2$ kann man nicht in $\mathbb{R}^3$ einbetten.