Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen WS 2012

Einführung in Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 5

Wjatscheslaw Kewlin 22. November 2012

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 29. November vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Koeffizienten der induzierten Metrik von $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ bezüglich einer durch stereographische Projektion definierten Karte.

Aufgabe 2. Sei $f\colon M^2 \to \mathbb{R}^3$ eine immersierte Fläche mit Gaussabbildung $n\colon M^2 \to S^2$. Zeigen Sie, daß die dritte Fundamentalform $III =< dn, dn >$ keine Information enthält, die nicht schon in den ersten beiden Fundamentalformen enthalten wäre. (Tip: Benutzen Sie den Satz von Cayley–Hamilton.)

Aufgabe 3. Sei $f\colon M^2 \to \mathbb{R}^3$ eine immersierte Fläche mit Gaussabbildung $n\colon M^2 \to S^2$. Zeigen Sie, daß f Werte in einer Sphäre von Radius 1 annimmt, wenn die zweite Fundamentalform gleich der ersten Fundamentalform ist.

Aufgabe 4. (In dieser Aufgabe geht es darum, die allgemeine Theorie orientierter Hyperflächen im eindimensionalen Fall, also im Fall ebener Kurven, zu diskutieren.) Sei $\gamma\colon (a, b) \to \mathbb{R}^2$ eine immersierte Kurve. Zeigen Sie:

a) Man kann die Kurve γ so umparametrisieren, daß die erste Fundamentalform bezüglich des neuen Parameters s die Form $g = ds^2$ hat, d.h. die Ableitung von γ nach s hat Länge 1. (Die “innere Geometrie” von Kurven ist also immer gleich.)

b) Die Kurve γ ist bis auf Euklidische Bewegung eindeutig bestimmt durch die erste und zweite Fundamentalform. (Benutzen Sie a) und nehmen Sie an, γ sei “nach Bogenlänge” s parametrisiert. Identifizieren Sie $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ und schreiben Sie das Tangentialvektorfeld $\gamma'(s)$ als $\gamma'(s) = e^{i\theta(s)}$. Dann ist $n(s) = ie^{i\theta(s)}$ ein Normalenvektorfeld. Berechnen Sie, wie man den Koeffizienten κ der zweiten Fundamentalform $h = \kappa(s)ds^2$, die “Krümmung” der Kurve, aus der Funktion θ bestimmt. Folgern Sie obige Behauptung, den “Fundamentalsatz der Theorie ebener Kurven”.)