Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen WS 2012

Einführung in Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 7

Wjatscheslaw Kewlin 6. Dezember 2012

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 13. Dezember vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Sei M^n eine Mannigfaltigkeit und seien X_1,...,X_r Vektorfelder auf einer offenen Menge $U \subset M$, so daß alle Lie–Klammern $[X_i, X_j]$ verschwinden und X_1,...,X_r punktweise linear unabhängig sind. Zeigen Sie, daß X_1,...,X_r lokal um jeden Punkt $p \in U$ als Gaußbasisfelder bezüglich einer Karte darstellbar sind.

Aufgabe 2. Sei E eine involutive Distribution vom Rang k auf einer Mannigfaltigkeit M der Dimension n und (U, φ) eine Karte. Sei $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ die Projektion auf die ersten k Koordinaten und $d(\pi \circ \varphi)_p|_{E_p}\colon E_p \to \mathbb{R}^k \times \{0\}$ für alle $p \in U$ bijektiv.

(i) Zeigen Sie, daß durch $d(\pi \circ \varphi)_p(X_i(p)) = e_i$, $X_i(p) \in E_p$ eindeutig glatte kommutierende Vektorfelder $(X_i)_{1\le i\le k}$ auf U definiert werden.

(ii) Zeigen Sie, daß die Flüsse dieser Vektorfelder lokale Parametrisierungen der Integralmannigfaltigkeiten von E liefern.

Aufgabe 3. Seien X, Y Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M und sei Φ_t der lokale Fluß von X. Dann erfüllt $Y(t) = (\Phi_{-t})_* Y$ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} Y(t) = (\Phi_{-t})_*[X, Y].$$

Aufgabe 4. Seien V und W Vektorräume mit Basen $(v_1, \dots v_n)$ und $(w_1, \dots w_m)$ und dualen Basen $(v_1^*, \dots, v_n^*)$ und $(w_1^*, \dots, w_m^*)$.

(i) Seien $v^* \in V^*$ und $w \in W$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von $v^* \otimes w \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und ihren Rang. (Benutzen Sie $V^* \otimes W \cong L(V, W^*; \mathbb{R}) \cong L(V, W)$.)

(ii) Zeigen Sie, daß es für $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ eindeutig besimmte Skalare $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ gibt, so daß

$$A = \sum_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} a_{ij} v_j^* \otimes w_i$$

Was ist die Matrixdarstellung von A in den gegebenen Basen?

(iii) Sei $V = W$. Zeigen Sie, daß für die Kontraktion $v^*(w)$ von $v^* \otimes w$ gilt

$$\mathrm{tr}(v^* \otimes w) = v^*(w).$$

Aufgabe 5.* Sei $A\colon V \to W$ eine lineare Abbildung und $\omega \in \bigwedge^k(W^*)$ eine k–lineare alternierende Form. Man definiert $A^*\omega \in \bigwedge^k(V^*)$ durch

$$A^*\omega(v_1, ..., v_k) = \omega(Av_1, ..., Av_k).$$

Zeigen Sie, daß für jeden Endomorphismus $A\colon V \to V$ eines n–dimensionalen Vektorraumes V und $\omega \in \bigwedge^n(V^*)$ gilt

$$A^*\omega = \det(A)\omega.$$