Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen WS 2012

Einführung in Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 8

Wjatscheslaw Kewlin 13. Dezember 2012

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 20. Dezember vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1.

a) Sei V ein orientierter Euklidischer Vektorraum der Dimension n. Zeigen Sie, daß es eine eindeutige Form $\omega \in \Lambda^n(V^*)$ gibt, die einer (und damit jeder) orientierten Orthonormalbasis die Zahl 1 zuordnet.

b) Transformieren Sie die Volumenform $\omega^2 = dx \wedge dy$ von $\mathbb{R}^2$ auf Polarkoordinaten. Transformieren Sie die Volumenform $\omega^3 = dx \wedge dy \wedge dz$ von $\mathbb{R}^3$ auf sphärische Koordinaten und auf Zylinderkoordinaten. (Als *Volumenform* bezeichnet man allgemein eine Differentialform, die einer/jeder positiv orientierten Orthonormalbasis das Volumen 1 zuordnet.)

Aufgabe 2. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Definieren Sie einen Atlas auf

$$\Lambda^k(T^*M) := \dot\cup_{p\in M}\Lambda^k(T_p^*M),$$

der $\Lambda^k(T^*M)$ zu eine Mannigfaltigkeit macht, so daß die Projektion

$$\pi\colon \Lambda^k(T^*M) \to M$$

auf den Fußpunkt eine glatte Abbildung wird und eine differenzierbare k–Form ω genau eine glatte Abbildung $\omega\colon M \to \Lambda^k(T^*M)$ mit $\pi \circ \omega = id_M$ ist.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass für $\omega \in \Omega^k(M)$ und $X_0, \dots, X_k \in \Gamma(TM)$ gilt

$$\begin{aligned} d\omega(X_0,\dots,X_k) = &\sum_{i=0}^{k}(-1)^i X_i(\omega(X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_k)) \\ &+ \sum_{0\le i<j\le k}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_k). \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Sei $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ eine orientierte Hyperfläche, d.h. eine Immersion einer orientierten $(n-1)$–dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Bezeichne $N\colon M \to S^{n-1}$ die positive Gaussabbildung von f, d.h. N_p steht senkrecht auf $df_p(T_pM)$ und

$$N(p), \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), ..., \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(p)$$

ist positive Basis von $\mathbb{R}^n$ wenn $(U, \varphi = (x_1, ..., x_{n-1}))$ eine positive Karte und $p \in U$ ist. Dann ist $\omega = \det(N, ...)$ die Volumenform von M bezüglich der von f induzierten Geometrie.

Zeigen Sie, daß in einer positiven Karte $(U, \varphi = (x_1, ..., x_{n-1}))$ gilt:

$$\omega = \sqrt{\det(< \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} >)}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}.$$

Im Fall von $n = 3$ gilt auch:

$$\omega = \|\frac{\partial f}{\partial x_1} \times \frac{\partial f}{\partial x_2}\| dx_1 \wedge dx_2.$$