Einführung in Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 9

Wjatscheslaw Kewlin 20. Dezember 2012

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 10. Januar 2013 vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß eine Mannigfaltigkeit M der Dimension n genau dann orientierbar ist, wenn es eine Differentialform $\omega \in \Omega^n(M)$ vom Grad n gibt, die nirgendwo verschwindet. (Tip: Benutzen Sie die Existenz von Partitionen der Eins.)

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß eine kompakte Mannigfaltigkeit M zu jeder Überdeckung eine (endliche) Partition der Eins besitzt. (Hier sollen Sie natürlich nicht die allgemeine Existenz von Partitionen der Eins benuzten.)

Aufgabe 3. Sei $\Phi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus zwischen zwei offenen Mengen U, $V \subset \mathbb{R}^n_-$ im Halbraum $\mathbb{R}^n_-$. Zeigen Sie, daß $\Phi(U \cap \partial\mathbb{R}^n_-) = V \cap \partial\mathbb{R}^n_-$.

Aufgabe 4. (Klassische Vektoranalysis in $\mathbb{R}^3$) Wir definieren

$$d\vec{s} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \qquad d\vec{S} = \begin{pmatrix} dy \wedge dz \\ dz \wedge dx \\ dx \wedge dy \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad dV = dx \wedge dy \wedge dz.$$

Welchen Operationen der Vektorrechnung in $\mathbb{R}^3$ entsprechen $d\vec{S}$ und dV? Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen. Den sogenannten *de Rham–Komplex*

$$0 \longrightarrow \Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \Omega^2(U) \xrightarrow{d} \Omega^3(U) \longrightarrow 0$$

von U kann man übersetzen in einen Komplex

$$0 \longrightarrow C^\infty(U,\mathbb{R}) \xrightarrow{?} C^\infty(U,\mathbb{R}^3) \xrightarrow{?} C^\infty(U,\mathbb{R}^3) \xrightarrow{?} C^\infty(U,\mathbb{R}) \longrightarrow 0,$$

indem man Vektorfelder durch Multiplikation mit $d\vec{s}$ zu 1–Formen oder durch Multiplikation mit $d\vec{S}$ zu 2–Formen und Funktionen durch Multiplikation mit dV zu 3–Formen macht. Welchen Operatoren entsprechen dabei die d's im obigen Diagramm? Welchen klassischen Identitäten entspricht $d \circ d = 0$?

Geben Sie die drei klassischen Versionen des Satzes von Stokes an, die man erhält, wenn man eine n–dimensionale ($n = 1$, 2, oder 3) Mannigfaltigkeit M^n mit Rand in U einbettet und den Pullback einer $(n-1)$–Form $\omega \in \Omega^{n-1}(U)$ über den Rand ∂M von M integriert.

Aufgabe 5.* Eine 1–Form $\omega \in \Omega^1(S^1)$ auf S^1 ist genau dann die Ableitung $\omega = df$ einer Funktion f, wenn gilt $\int_{S^1} \omega = 0$.