Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen WS 2012

Einführung in Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 10

Wjatscheslaw Kewlin 10. Januar 2013

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 17. Januar 2013 vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Sei $E \to M$ eine reelles Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M. Beweisen Sie:

i) Der Raum $\Gamma(E)$ der Schnitte von E ist ein reeller Vektorraum und ein Modul über dem Ring $C^\infty(M, \mathbb{R})$ der glatten Funktionen auf M.
ii) Ein lokaler Rahmen $\underline{s} = (s_1, ..., s_r)$ eines Vektorbündels definiert eine lokale Trivialisierung und umgekehrt.

Aufgabe 2. Seien E und F reelle Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M. Zeigen Sie, daß das punktweise definierte Tensorprodukt $E \otimes F$ der beiden Bündel wieder ein Vektorbündel ist. Welchen Rang hat es?

Aufgabe 3. Seien E und F reelle Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M. Zeigen Sie, daß ein $\mathbb{R}$–linearer Operator von $\Gamma(E)$ nach $\Gamma(F)$ genau dann $C^\infty(M)$–linear ist, wenn er von der Form

$$\psi \mapsto A(\psi)$$

ist, wobei $A \in \Gamma(\mathrm{Hom}(E, F))$ ein Schnitt des Vektorbündels $\mathrm{Hom}(E, F) \cong E^* \otimes F$ ist. (Hier bezeichnet E^* das Vektorbündel, welches man durch punktweises Übergehen zum dualen Vektorraum erhält.)

Aufgabe 4. Eine *Bündelmetrik* auf einem reellen Vektorbündel E ist ein Schnitt $h \in \Gamma(E^* \otimes E^*)$ (oft auch mit $< . >$ bezeichnet), welcher in jedem Punkt eine positiv definite Bilinearform auf der entsprechenden Faser definiert. Zeigen Sie, daß die Wahl von $O(n)$–wertigen Kozykeln eine Bündelmetrik definiert. Umgekehrt kann man ein Bündel mit einer Metrik immer so trivialisieren, daß die Kozykel Werte in $O(n)$ annehmen. Zeigen Sie, daß jedes Bündel eine Metrik besitzt (Tip: Partition der Eins) und damit durch $O(n)$–Kozykel dargestellt werden kann. (Was bedeutet es, wenn ein Bündel durch $SO(n)$–wertige Kozykel dargestellt werden kann?)

Aufgabe 5.* Bestimmen Sie die Isomorphieklassen von Linienbündeln über S^1. (Wählen Sie eine Metrik. Dann ist ein Schnitt von Länge eins entweder global definiert, oder kommt verdreht an, wenn man einmal rum geht...)

Aufgabe 6.* Sei $\Sigma_{\mathbb{RP}^n} = \{(p, v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in p\}$. Zeigen Sie, daß Σ mit $\pi\colon \Sigma \to \mathbb{RP}^n$, $(p, v) \to p$ ein Linienbündel, das *tautologische Bündel* von $\mathbb{RP}^n$, ist. Ist $\Sigma_{\mathbb{RP}^1}$ trivial?