

Einführung in Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 11

Wjatscheslaw Kewlin

17. Januar 2013

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 24. Januar 2013 vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß eine kovariante Ableitung $\nabla: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$ auf einem Vektorbündel $E \rightarrow M$ ein lokaler Operator ist und daher auf offene Mengen eingeschränkt werden kann.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß jedes Vektorbündel $E \rightarrow M$ eine kovariante Ableitung besitzt (Tip: Partition der Eins). Zeigen Sie weiter, daß die Menge der Zusammenhänge auf $E \rightarrow M$ einen affinen Raum über dem Vektorraum $\Omega^1(M, \text{End}(E)) = \Gamma(T^*M \otimes \text{End}(E))$ bildet, wobei $\text{End}(E) = E^* \otimes E$.

Aufgabe 3. Ein Zusammenhang ∇ auf einem reellen Vektorbündel E mit einer Bündelmetrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wird als *metrisch* bezeichnet, wenn

$$\nabla \langle \varphi, \psi \rangle = \langle \nabla \varphi, \psi \rangle + \langle \varphi, \nabla \psi \rangle.$$

Zeigen Sie:

- Ein Zusammenhang ist genau dann metrisch, wenn die Zusammenhangsformen bezüglich orthonormaler Rahmen schiefsymmetrisch sind.
- Jedes Vektorbündel mit Bündelmetrik besitzt einen metrischen Zusammenhang.
- Die metrischen Zusammenhänge auf $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bilden einen affinen Raum über dem Vektorraum der 1-Formen mit Werten in den schief-symmetrischen Endomorphismen von E .

Aufgabe 4. Sei ∇ ein Zusammenhang auf einem Vektorbündel $E \rightarrow M$ und sei $\omega \in \Omega^k(M, E) = \Gamma(\Lambda^k M \otimes E)$ eine k -Form mit Werten in E . Dann definiert

$$\begin{aligned} d^\nabla \omega(X_0, \dots, X_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \nabla_{X_i} (\omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k)) + \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k) \end{aligned}$$

für $X_0, \dots, X_k \in \Gamma(TM)$ eine $(k+1)$ -Form $d^\nabla \omega \in \Omega^{k+1}(M, E) = \Gamma(\Lambda^{k+1} M \otimes E)$ mit Werten in E . (Tip: Zeigen Sie, daß dieser Ausdruck C^∞ -linear in den X_j ist; benutzen Sie Aufgabe 3 von Blatt 10.)

Aufgabe 5.* Der Ausdruck $d^\nabla \nabla \varphi$ (d.h. $d^\nabla \omega$ mit $\omega = \nabla \varphi$) ist C^∞ -linear in $\varphi \in \Gamma(E)$. Damit kann man $d^\nabla \nabla$ als ein Schnitt von $\Omega^2(\text{End}(E))$ auffassen.