
Einführung in Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 12

Wjatscheslaw Kewlin

24. Januar 2013

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 31. Januar 2013 vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1.* Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇ . Sei ω die Zusammenhangsform bezüglich eines lokalen Rahmens $\underline{s}$, d.h. $\nabla \underline{s} = \underline{s}\omega$. Dann ist die Krümmungsform bezüglich des Rahmens $d\omega + \omega \wedge \omega$, d.h. es gilt

$$\mathcal{R}^\nabla \underline{s} = \underline{s}(d\omega + \omega \wedge \omega).$$

Aufgabe 2.* Sei $\omega \in \Omega^1(U, \text{Mat}_{r \times r}(\mathbb{K}))$ eine matrixwertige 1-Form auf einem Quader $U \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß es genau dann eine Funktion $f: U \rightarrow GL_r(\mathbb{K})$ mit $f^{-1}df = \omega$ gibt, wenn $d\omega + \omega \wedge \omega = 0$.

Aufgabe 3.* Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇ . Zeigen Sie

$$d^\nabla \circ d^\nabla \omega = \mathcal{R}^\nabla \wedge \omega$$

für $\omega \in \Omega^k(M, E)$. (Hier ist d^∇ der auf Blatt 11 definierte Operator.)

Aufgabe 4.* Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇ . Zeigen Sie: ∇ ist genau dann flach, wenn der Paralleltransport $\mathcal{P}_\gamma^\nabla$ nur von der Homotopieklasse (mit festen Randpunkten) des Weges γ abhängt.