Geometrie : Übungsblatt 1

14. Oktober 2014

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und bis vor der Vorlesung am 23. Oktober abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Wie in der Vorlesung bezeichne $\mathbb{RP}^2$ die reelle projektive Ebene, d.h. die Menge der eindimensionalen linearen Unterräume von $\mathbb{R}^3$. Die Punkte mit homogenen Koordinaten der Form $[x : y : 1] \in \mathbb{RP}^2$ identifizieren wir mit $\mathbb{R}^2$. Punkte der Form $[x : y : 0] \in \mathbb{RP}^2$ identifizieren wir mit Richtungen in $\mathbb{R}^2$ und sehen sie als "unendlich ferne Punkte" von $\mathbb{R}^2$ an.

Aufgabe 1. Seien P_1, P_2, P_3 und Q_1, Q_2, Q_3 zwei geordnete Tripel paarweise verschiedener Punkte in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

a) Sind beide Tripel nicht kollinear, so gibt es eine eindeutige affine Transformation, die P_i auf Q_i, $i = 1, 2, 3$ abbildet.

b) Sind beide Tripel kollinear, so gibt es genau dann eine affine Transformation, die P_i auf Q_i, $i = 1, 2, 3$ abbildet, wenn
$$\frac{P_1 - P_2}{P_2 - P_3} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_2 - Q_3},$$
wobei die Quotienten definiert sind, da beide Tripel kollinear sind.

Aufgabe 2. Eine inhomogene lineare Gleichung
$$ax + by + c = 0$$
mit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ kann man in die homogene Gleichung
$$ax + by + cz = 0$$
umwandeln, deren Lösungen mit $z = 1$ den Lösungen der inhomogenen Gleichung entsprechen.

a) Die homogene Gleichung definiert eine Gerade in $\mathbb{RP}^2$. Unter welcher Bedingung an diese Gerade definiert die inhomogene Gleichung eine Gerade in $\mathbb{R}^2$?

b) Geben Sie eine projektiv–geometrische Interpretation der Lösungstheorie von Systemen inhomogener Gleichungen in zwei Variablen, die aus zwei Gleichungen der obigen Form bestehen.

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

a) Zu je zwei verschiedenen Punkten in $\mathbb{RP}^2$ gibt es genau eine Gerade, die beide Punkte enthält.
b) Je zwei verschiedene Geraden in $\mathbb{RP}^2$ schneiden sich in genau einem Punkt.

Aufgabe 4. Seien l, l' zwei Geraden in $\mathbb{RP}^2$ und P ein Punkt mit $P \notin l, l'$.

i) Für jeden Punkt $Q' \in l'$ gibt es einen eindeutigen Punkt $Q \in l$, so daß P, Q und Q' kollinear sind. Die Abbildung $Q' \mapsto Q$ nennt man die Zentralprojektion von l' auf l mit Projektionszentrum P.

Nehmen wir an, daß l nicht gleich der unendlich fernen Geraden ist, so gibt es eine affine Transformation, die l auf die x–Achse und P auf den Punkt $[0, 1, 0]$ oder den Punkt $[0, -1, 1]$ abbildet (je nachdem, ob P auf der unendlich fernen Geraden liegt oder nicht). Nehmen wir weiter an, daß auch l' nicht gleich der unendlich fernen Geraden ist, so kann der affine Teil $l' \cap \mathbb{R}^2$ von l' in Punkt–Richtungs–Form

$$\left\{ x' \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ d-1 \end{pmatrix} \mid x' \in \mathbb{R} \right\}$$

geschrieben werden mit a, b, c, und $d \in \mathbb{R}$.

ii) Berechnen Sie im Fall eines unendlich fernen Projektionszentrums $P = [0, 1, 0]$ die obige Projektion explizit als Abbildung von x' nach x. Warum ist in diesem Fall $a \neq 0$?
iii) Berechnen Sie im Fall eines endlichen Projektionszentrums $P = [0, -1, 1]$ die obige Projektion explizit als Abbildung von x' nach x. (Warum gilt in diesem Fall $ad - bc \neq 0$?)

Aufgabe 5.* Berechnen Sie explizit die Zentralprojektion von der x–Achse auf die y–Achse mit Projektionszentrum $[-1 : 1 : 1]$ (vgl. Aufgabe 4). Visualisieren Sie die Abbildung durch eine Skizze. Berechnen Sie die Bilder der Punkte $x = 0$, 1, 2, 3, 4,... Was ist das Urbild des unendlich fernen Punktes auf der y–Achse und was ist das Bild des unendlich fernen Punktes auf der x–Achse? Welche Abbildung der y–Achse entspricht der Translation $x \mapsto x + 1$?