Geometrie : Übungsblatt 2

21. Oktober 2014

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und bis vor der Vorlesung am 30. Oktober abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Sei $(V, \langle, \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $d(P, Q) = \|P - Q\|$ die von der euklidischen Norm induzierte Abstandsfunktion.

i) Beweisen Sie die Dreiecksungleichung
$$d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$$
für P, Q und $R \in V$ und zeigen Sie, daß Gleichheit in der Dreiecksungleichung genau dann gilt, wenn die drei Punkte auf einer Geraden liegen und R Konvexkombination von P und Q ist, also "zwischen P und Q liegt" im Sinne, daß
$$R = \lambda P + (1 - \lambda)Q$$
für $\lambda \in [0, 1]$.

ii) Charakterisieren Sie Geraden mittels der Abstandsfunktion (ohne Verwendung von linearer Algebra).

iii) Folgern Sie, daß Isometrien eines euklidischen Vektorraumes Geraden auf Geraden abbilden.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ genau dann den euklidischen Abstand erhält, wenn sie eine euklidische Bewegung, d.h. eine Verkettung von $A \in O(2)$ mit einer Translation, ist.

(Es ist klar, daß sowohl die euklidischen Bewegungen und als auch die Isometrien von $\mathbb{R}^2$ eine Gruppe bilden und daß die Bewegungen in den Isometrien enthalten sind; zu zeigen ist also die Gleichheit beider Gruppen. Anleitung: zeigen Sie, daß es für je zwei Punktepaare P, Q und P', Q' mit $d(P, Q) = d(P', Q')$ mindestens eine *Bewegung* (genau zwei Bewegungen) f gibt mit $f(P) = P'$ und $f(Q) = Q'$. Zeigen Sie, daß es genau zwei *Isometrien* gibt, die $P = (0, 0)$ und $Q = (r, 0)$ mit $r > 0$ festhalten, und daß diese Isometrien Bewegungen sind. Folgern Sie die Behauptung.)

Aufgabe 3. Seien P_1, ..., P_N und Q_1, ..., Q_N zwei N–Tupel von Punkten in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, daß es genau dann eine Bewegung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(P_i) = Q_i$ für alle $i = 1$, ..., N gibt, wenn $d(P_i, P_j) = d(Q_i, Q_j)$ für alle i, $j = 1$, ..., N gilt. Die Bewegung ist eindeutig, wenn die Punkte nicht kollinear sind. (Tip: zeigen Sie erst den Fall $N = 3$ und folgern Sie den allgemeinen Fall.)

Aufgabe 4. Seien P_1, ..., P_4 und Q_1, ..., Q_4 zwei Quadrupel von Punkte in der reell projektiven Ebene $\mathbb{RP}^2$ mit der Eigenschaft, daß in beiden Quadrupeln keine drei Punkte kollinear sind. Zeigen Sie, daß es eine eindeutige projektive Transformation $f\colon \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ gibt mit $f(P_i) = Q_i$ für $i = 1$, ..., 4.

Aufgabe 5.* Sei M eine Menge und G eine Gruppe, die auf M wirkt. Man spricht von einem *homogenen Raum* bzw. eine *transitiven Gruppenwirkung*, wenn "alle Punkte von M gleich aussehen" in dem Sinne, daß es für je zwei Punkte P, $Q \in M$ eine Symmetrie $g \in G$ gibt mit $g(P) = Q$.

i) Zeigen Sie, daß es dann für jeden Punkt $P \in M$ eine kanonische Identifikation
$$M \cong G/H$$
gibt zwischen Punkten der Menge M und Rechtsnebenklassen von G bezüglich der *Standgruppe* bzw. *Isotropiegruppe* H von P, d.h. der Untergruppe aller Transformationen, die P festhalten.

ii) Berechnen Sie die Isotropiegruppe des Punktes O und die Nebenklassendarstellung für $M = \mathbb{R}^2$ und G die Gruppe der affinen Transformationen.

iii) Berechnen Sie die Isotropiegruppe des Punktes $P = (1, 0, 0)$ und die Nebenklassendarstellung der Wirkung von $G = SO(3)$ auf der 2–Sphäre
$$M = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$