Geometrie : Übungsblatt 6

18. November 2014

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und bis vor der Vorlesung am 27. November abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß die Existenz und Bijektivität von $f\colon \tilde{Y} \to Y$ im Satz über die Zentralprojektion direkt aus der Dimensionsformel folgt.

Aufgabe 2.* Zeigen Sie:

a) Das Komplement $\mathbb{P}(V)\backslash H$ einer Hyperebene H in einem projektiven Raum $\mathbb{P}(V)$ hat auf natürliche Weise die Struktur eines affines Raumes. Die Gruppe der projektiven Transformationen, welche H invariant lassen, entspricht dabei der Gruppe der affinen Transformationen von $\mathbb{P}(V)\backslash H$. Umgekehrt entsteht jeder projektive Raum, indem man einen affinen Raum um eine unendlich ferne Hyperebene ergänzt.

b) Eine beliebige Zentralprojektion wird durch passende Wahl einer unendlich ferne Hyperebene $H \subset \mathbb{P}(V)$ zu einer Parallelprojektion. (Wenn Sie möchten, können Sie sich beschränken auf den Fall einer Zentralprojektion zwischen zwei Ebenen in einem drei–dimensionalen reellen projektiven Raum. Der allgemeine Fall geht im Wesentlichen gleich.)

(Anleitung zu a). Am einfachsten sieht man diese Korrespondenz zwischen projektiven Räumen mit ausgezeichneter Hyperebene und affinen Räumen in Koordinaten. Etwas invarianter kann man diese wie folgt formulieren: sei die Hyperebene H von der Form $H = \mathbb{P}(W)$, wobei $W \subset V$ eine lineare Hyperebene ist. Dann gibt es eine bis auf Skalierung eindeutige Linearform $\alpha \in V^*\backslash\{0\}$ mit $W = \ker(\alpha)$. Die Menge $\mathbb{P}(V)\backslash H$ kann nun identifiziert werden mit der affinen Hyperebene $\alpha^{-1}(\{1\}) \subset V$ mit Tangentialvektorraum W. Um umgekehrt einen affinen Raum zu einem projektiven Raum zu vervollständigen, kann man diesen durch Wahl eines Ursprungs mit dem dazugehörigen Vektorraum W identifizieren. Einen projektiven Raum erhält man dann als $\mathbb{P}(V)$ mit $V = W \oplus \mathbb{K}$. In diesen kann man den affinen Raum einbetten als Punkte mit homogenen Koordinaten der Form $W \times \{1\}$.)

Aufgabe 3. Eine projektive Abbildung $f\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ heißt *Perspektivität*, wenn sie eine Hyperebene $H = \mathbb{P}(W)$ punktweise festhält. Zeigen Sie:

a) Ist $f\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ eine nicht–triviale Perspektivität, so gibt es einen eindeutigen Punkt $Z \in \mathbb{P}(V)$ mit der Eigenschaft, daß für alle $P \in \mathbb{P}(V)$

die Punkte Z, P und $f(P)$ kollinear sind. (Den Punkt Z nennt man das *Zentrum* und die Hyperebene H die *Basis* der Perspektivität.)

b) Welche Art affiner Abbildung erhält man im Fall $z \in H$ bzw. $z \notin H$, wenn man eine Perspektivität einschränkt auf $\mathbb{P}(V)\backslash H$?

c)* Jede projektive Abbildung einer reellen projektiven Ebene ist die Verkettung von maximal drei Perspektivitäten. (Benutzen Sie, daß eine lineare Transformation auf einem drei–dimensionalen reellen Vektorraum mindestens einen Eigenvektor hat und daß Elementarmatrizen, die keine Permutationen sind, Perspektivitäten induzieren.)

Aufgabe 4. Seien P_1, P_2 und P_3 paarweise verschiedene Punkte in $\mathbb{KP}^1$. Wieviele von P_1, P_2, P_3 verschiedene Punkte P_4 mit Doppelverhältnis

$$DV(P_1, P_2, P_3, P_4) = \lambda$$

gibt es für gegebenes $\lambda \in \mathbb{K}$? Wie lautet die entsprechende Aussage über das affine Verhältnis?

Aufgabe 5.

- Vor einem italienischen Palast stehen zwei Säulen und eine Statue in einer Reihe mit Abständen $4\,m$, $3\,m$ bzw. $1\,m$ von der Wand. Ein Maler möchte ein Bild des Palastes malen, auf dem die Säulen $3\,cm$ und $1\,cm$ von der Wand entfernt sind. Welche Entfernung von der Wand muß die Statue in dem Bild haben, damit die Perspektive stimmt?
- Auf einem Luftbild einer (geraden) Autobahn sieht man eine Autobahnabfahrt und zwei Hinweisschilder, die $2\,km$ bzw. $3\,km$ vor der Abfahrt stehen. Weiter sieht man zwischen dem $2\,km$ Hinweisschild und der Abfahrt ein Auto. Auf dem Bild ist der Abstand zwischen der Abfahrt und dem Auto $1\,cm$ und der zwischen der Abfahrt und den beiden Schildern $4\,cm$ bzw. $6\,cm$. Welchen Abstand hat das Auto von der Abfahrt?
- Auf einem Luftbild sieht man eine (gerade) Bahnlinie, auf der ein Zug zwischen zwei Bahnhöfen unterwegs ist. Auf dem Bild ist der Abstand der Bahnhöfe untereinander genau $4\,cm$, der Zug hat genau Abstand $2\,cm$ von beiden Bahnhöfen, und der Abstand des zweiten Bahnhof zum Fluchtpunkt der Schienen (dem Punkt, an dem die beiden Schienen sich im Bild treffen) ist $4\,cm$. Welchen Abstand vom zweiten Bahnhof hat der Zug, wenn der Abstand zwischen den beiden Bahnhöfen 50 km ist?

Aufgabe 6.* Zeichnen Sie drei Geraden, auf denen jeweils vier Punkte liegen, so daß der Abstand zwischen benachbarten Punkten der Reihe nach $4\,cm$, $2\,cm$ und a) $1\,cm$, b) $1.2\,cm$ bzw. c) $1.4\,cm$ ist. Versuchen Sie mit bloßem Auge zu erkennen, welches der Quadrupel eine Zentralprojektion von vier äquidistanten Punkten sein kann. Entscheiden Sie die Frage mit (gespitztem) Bleistift und Lineal, indem Sie die ersten drei Punkte als Zentralprojektion dreier äquidistanter Punkte auf einer anderen Geraden darstellen...