Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen WS 2014/2015

Geometrie : Übungsblatt 9

16. Dezember 2014

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und bis vor der Vorlesung am 8. Januar abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Berechnen Sie die stereographische Projektion von $S^n \backslash \{N\}$ mit $N = (0, ..., 1)$ auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sowie deren Umkehrabbildung.

Aufgabe 2. Der affine Teil einer nicht leeren, nicht ausgearteten Quadrik Q in $\mathbb{RP}^2$ ist genau dann eine Ellipse (oder Parabel bzw. Hyperbel), wenn Q die unendlich ferne Gerade nicht (oder in einem Punkt bzw. in zwei Punkten) schneidet.

Aufgabe 3. Die Menge der Kegelschnitte in $\mathbb{RP}^2$ ist ein fünfdimensionaler projektiver Raum. Sind P_1, ..., $P_4 \in \mathbb{RP}^2$ in allgemeiner Lage, so ist die Familie der Kegelschnitte, welche P_1,..., P_4 enthalten, eine Gerade im Raum der Kegelschnitte. Welche Quadriken dieser Familie sind ausgeartet? Ist P_5 ein weiterer Punkte und verschieden von P_1,..., P_4, so gibt es genau eine Quadrik durch P_1,..., P_5.

Aufgabe 4. Geben Sie für jeden möglichen Typ von Quadrik in $\mathbb{RP}^2$ eine homogene Gleichung an, so daß die Quadrik projektiv äquivalent zur durch diese Gleichung definierten Quadrik ist. Erklären Sie, welche projektiven Äquivalenzklassen von Quadriken sich weiter aufspalten, wenn man Äquivalenz unter affinen Transformationen betrachtet. Welche Äquivalenzklassen fallen umgekehrt zusammen, wenn man zu $\mathbb{CP}^2$ übergeht?

Aufgabe 5*. Sei Q eine nicht ausgeartete Quadrik in $\mathbb{CP}^2$ und B eine definierende symmetrischen Bilinearform. Für $A = [a] \in \mathbb{CP}^2$ definiert die Linearform $B(a, .)$ eine Gerade in $\mathbb{CP}^2$, die sogenannte *Polare* mit *Pol A*. Es gilt:

i) Jede Gerade schneidet Q in ein oder zwei Punkten.
ii) Ist $A \in Q$, so ist die Polare mit Pol A die sogenannte *Tangente* an Q im Punkt A, d.h. die eindeutige Gerade, welche Q nur in A schneidet.
iii) Ist $A \notin Q$, so schneidet die Polare in A die Quadrik Q in zwei Punkten. Die Tangenten in diesen beiden Punkten schneiden sich in A.