Prof. Dr. Christoph Bohle

Geometrie : Extrablatt 1

(Komplex eindimensionale affine Geometrie)

30. Oktober 2014

Diese Aufgaben zum Teil II (Donnerstagsteil) der Vorlesung werden nicht korrigiert. Sie können von den Übungsleitern Musterlösungen erhalten, wenn Sie Ihre Lösungsversuche vorzeigen.

Ein Ziel dieser Aufgaben ist, den Stoff der Donnerstagsvorlesungen zu vertiefen[1]. Ein weiteres Ziel ist, die Nützlichkeit der komplexen Zahlen für die ebene Geometrie zu demonstrieren. Dazu werden wir auf einige klassische Resultate der ebenen euklidischen Geometrie eingehen[2] und im letzten Abschnitt (F) zwei der Höhepunkte der komplex eindimensionalen affinen Geometrie vorstellen.

A. Komplex eindimensionale affine Geometrie

Aufgabe 1. (Charakterisierung affiner Abbildungen.) Eine bijektive Abbildung $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann affin, wenn sie affine Verhältnisse erhält.

Aufgabe 2. (Realität des affinen Verhältnisses und Kollinearität.) Drei paarweise verschiedene Punkte P_1, P_2 und $P_3 \in \mathbb{C}$ liegen genau dann auf einer reellen Geraden, wenn ihr affines Verhältnis $\frac{P_1-P_2}{P_2-P_3}$ reell ist. Das Verhältnis ist dann positiv, wenn P_2 zwischen P_1 und P_3 liegt, und sonst negativ. Welche Werte kann das affine Verhältnis annehmen?

Aufgabe 3. (Zur Definition des affinen Verhältnisses.) Überlegen Sie, daß die verschiedenen Möglichkeiten, aus drei paarweise verschiedenen Punkten P_1, P_2 und $P_3 \in \mathbb{C}$ ein "affines Verhältnis" zu bilden, im Wesentlichen äquivalent sind (also alle affin invariant sind und den gleichen Informationsgehalt haben).

B. Winkel- und orientierungstreue lineare Abbildungen

Aufgabe 4. (Gleichseitige Parallelogramme, winkeltreue lineare Abbildungen.)

a) Zeigen Sie, daß ein Parallelogramm genau dann gleichseitig ist, wenn seine Diagonalen sich senkrecht schneiden.
b) Folgern Sie, daß eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ genau dann (rechte) Winkel erhält, wenn sie Längenverhältnisse erhält.

Aufgabe 5. (Mittelpunkt von Kreisen, kreistreue lineare Abbildungen.)

a) Der Mittelpunkt eines Kreises ist eindeutig.
b) Ist das Bild des Einheitskreises in $\mathbb{R}^2$ unter einer linearen Abbildung wieder ein Kreis, so ist der Mittelpunkt dieses Kreises wieder der Nullpunkt und die lineare Abbildung wird durch eine Matrix $A \in \mathbb{R}_* O(2)$ repräsentiert.

[1] Die Aufgaben 1–7, sowie 9 (und 15) sind direkte Ergänzungen zur 2.–4. Donnerstagsvorlesung über die komplex eindimensionale affine Geometrie.

[2] Die Aufgaben 8 sowie 10–15 behandeln eine Reihe wichtiger Resultate und Tatsachen der ebenen euklidischen Geometrie. Diese Tatsachen können ohne Probleme auch "reell zweidimensional" formuliert werden, jedoch erlaubt der komplexe Zugang meist wesentlich effizientere und durchsichtigere Beweise (siehe Aufgaben 8 und 12).

Es sei angemerkt, daß alle Resultate der Aufgaben 8 und 10–15 später noch ausführlich vom synthetischen Standpunkt aus besprochen werden sollen. Diese Aufgaben können entweder als Ergänzung zum analytischen Teil der Vorlesung oder als Vorbereitung bzw. Komplementierung des synthetischen Teils der Vorlesung angesehen werden.

Aufgabe 6. (Orientierungstreue lineare Abbildungen.)
Eine linearer Endomorphismus auf $\mathbb{R}^2$ hat genau dann eine darstellende Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mit positiver Determinante, wenn er eine (und damit jede) positive Basis wieder auf eine positive Basis abbildet, wobei "positiv" manchmal auch als "positiv orientiert" bezeichnet wird. (Was kann man über die Determinante eines Endomorphismus aussagen, der eine negative Basis auf eine negative Basis abbildet?)

C. Euklidische Bewegungen

Aufgabe 7. (Abstand, Wirkung euklidischer Bewegungen auf Punktepaaren.)
Für zwei Punktepaare P_1, Q_1 und P_2, $Q_2 \in \mathbb{C}$ mit

$$(*) \qquad |P_1 - Q_1| = |P_2 - Q_2| > 0$$

gibt es genau eine euklidische Bewegung $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form $f(z) = az + b$, $|a| = 1$ und genau eine der Form $f(z) = a\bar{z} + b$, $|a| = 1$, so daß

$$f(P_1) = P_2 \quad \text{und} \quad f(Q_1) = Q_2.$$

(Was ändert sich, wenn man in $(*)$ das > 0 wegläßt? Was, wenn man $(*)$ ganz wegläßt?)

Aufgabe 8. (Klassifikation euklidischer Bewegungen in Dimension 2.)
Zeigen Sie, daß eine euklidische Bewegung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die ungleich der Identität ist, von genau einem der folgenden Typen ist:

i) Translation (entlang einer Geraden),
ii) Drehung (um einen Punkt),
iii) Spiegelung (an einer Geraden),
iv) Gleitspiegelung (bezüglich einer Geraden).

Eine euklidische Bewegung f von Typ ii) und iii) hat einen bzw. echt mehr als einen Fixpunkt. Eine euklidische Bewegung f von Typen i) und iv) hat keinen Fixpunkt. (Anleitung: Benutzen Sie, daß man unter der Identifizierung $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ alle euklidischen Bewegungen schreiben kann als $z \mapsto az + b$ oder $z \mapsto a\bar{z} + b$ mit $|a| = 1$ und $b \in \mathbb{C}$. Wer nicht überzeugt vom Nutzen der komplexen Zahlen für die ebene Geometrie ist, sei eingeladen, zum Vergleich eine rein reelle Lösung dieser Aufgabe anzufertigen.)

D. Winkel

Aufgabe 9. (Winkel versus orientierter Winkel.) Sei Q verschieden von P_1 und $P_2 \in \mathbb{C}$. Dann ist der *orientierte Winkel* (auch: der *gerichtete Winkel*) $\measuredangle P_1QP_2$ zwischen den Strahlen $[Q, P_1\rangle$ und $[Q, P_2\rangle$ in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ gleich der eindeutigen Zahl $\alpha \in (\pi, \pi]$, so daß

$$\frac{P_2 - Q}{P_1 - Q} = re^{i\alpha} \quad \text{mit} \quad r = \frac{|P_2 - Q|}{|P_1 - Q|}.$$

Welche euklidischen Bewegungen erhalten Vorzeichen orientierter Winkel? Zeigen Sie, daß der Betrag $|\alpha|$ von α gleich dem "gewöhnlichen" (ungerichteten) Winkel $\angle P_1QP_2$ zwischen den beiden Strahlen ist. Zeigen Sie weiter, daß α genau dann positiv ist, wenn die Vektoren $v = P_1 - Q$ und $w = P_2 - Q$ eine positive Basis von $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ (aufgefaßt als reeller Vektorraum) bilden. (Im Gegensatz zum gewöhnlichen Winkel kann der orientierte Winkel nur in Dimension zwei definiert werden.)

Aufgabe 10. (Winkel an sich schneidenden Geraden.) Wieviele Winkel werden durch zwei sich schneidende Geraden definiert? Wieviele dieser Winkel können verschieden sein? Wann sind alle der Winkel gleich?

Aufgabe 11. (Winkel, Wirkung euklidischer Bewegungen auf Strahlenpaaren.) Sei Q verschieden von P_1 und P_2 sowie Q' verschieden von P_1' und $P_2' \in \mathbb{C}$. Es gibt genau dann eine (positive) euklidische Bewegung, die das Strahlenpaar $[Q, P_1\rangle$, $[Q, P_2\rangle$ auf das Strahlenpaar $[Q', P_1'\rangle$, $[Q', P_2'\rangle$ abbildet, wenn die beiden durch die Strahlenpaare definierten (orientierten) Winkel übereinstimmen. (Diese Aufgabe ist das Analogon zu Aufgabe 7 für Winkel.)

Aufgabe 12. (Winkelteilung.) Sei Q verschieden von P_1, P_2 und $P_3 \in \mathbb{C}$. Liegen die Punkte P_1, P_2, P_3 in einer Halbebene an eine Gerade durch Q und liegt weiter der Strahl $[Q, P_2\rangle$ zwischen den Strahlen $[Q, P_1\rangle$ und $[Q, P_3\rangle$, so gilt

$$\angle(P_1QP_3) = \angle(P_1QP_2) + \angle(P_2QP_3).$$

E. Dreiecke

Im Folgenden sei ABC ein nicht–ausgeartetes Dreieck, also ein Dreick dessen Eckpunkte A, B und $C \in \mathbb{C}$ nicht kollinear sind. Wie üblich benutzen wir die Bezeichnung $\alpha = \angle(BAC)$, $\beta = \angle(ABC)$ und $\gamma = \angle(ACB)$ für die drei Innenwinkel. Mit $a = |B - C|$, $b = |A - C|$ und $c = |A - B|$ seien hier die Längen der drei Seiten $[B, C]$, $[A, C]$ und $[A, B]$ bezeichnet.

Aufgabe 13. (Cosinussatz, Satz von Pythagoras.) Beweisen Sie den Cosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

und folgern Sie den Satz von Pythagoras. (Anleitung: Schreibt man die Seiten eines Dreiecks in vektorieller Form, so kann man eine Seite als Summe der beiden anderen darstellen. Der Cosinussatz folgt dann aus der 1. Binomischen Formel und der Definition des Winkels).

Aufgabe 14. (Winkelsumme.) Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks in der euklidischen Ebene ist gleich "zwei rechten Winkeln", d.h.

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

(Anleitung: Nutzen Sie aus, daß die Strahlen $[C, A\rangle$ und $[C, B\rangle$ den gestreckten Winkel an die zu AB parallele Gerade durch den Punkt C in drei Winkel zerlegen, vgl. Aufgabe 12.)

Aufgabe 15. (Kongruenz– und Ähnlichkeitskriterien.) Beweisen Sie die Kriterien für Kongruenz und Ähnlichkeit von Dreiecken, die man als SSS, SWS und WSW–Test bzw. WWW–Test bezeichnet. Geben Sie Bedingungen an, unter denen zu gegebenen abstrakten SSS, SWS sowie WSW–Daten ein Dreieck existiert. (Diese innerhalb des analytischen Zugangs relativ leicht zu beweisenden Kriterien spielen eine fundamentale Rolle beim synthetischen Aufbau der euklidischen Geometrie.)

F. Fourierzerlegung von Dreiecken und zwei Anwendungen

Aufgabe 16. (Fourierzerlegung von Dreiecken.) Im Folgenden identifizieren wir einen Vektor $(A, B, C) \in \mathbb{C}^3$ mit den Eckpunkten eines (möglicherweise degenerierten) Dreiecks in $\mathbb{C}$. Das hermitesche Produkt

$$\langle (z_1, z_2, z_3), (w_1, w_2, w_3) \rangle = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{3} \bar{z}_k w_k$$

macht die Menge der Dreiecke zu einem Hilbertraum. Sei $\xi = e^{2\pi i/3}$, dann ist

$$v_0 = (1, 1, 1), \qquad v_{+1} = (1, \xi, \xi^2) \qquad \text{und} \qquad v_{-1} = (1, \xi^2, \xi)$$

eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{C}^3, \langle , \rangle)$. Jedes Dreieck (A, B, C) kann also geschrieben werden als

$$(A, B, C) = s\, v_0 + r\, v_{+1} + l\, v_{-1}$$

mit s, r und $l \in \mathbb{C}$. Sei (A, B, C) ein Dreieck, dessen Eckpunkte nicht alle gleich sind, d.h. das nicht von der Form $(A, B, C) = s\, v_0$ ist. Zeigen Sie:

- Der Schwerpunkt $(A + B + C)/3$ des Dreiecks (A, B, C) ist gleich s.
- Das Dreieck (A, B, C) ist genau dann gleichseitig und positiv orientiert (rechtsdrehend), wenn $l = 0$ oder, äquivalent, wenn $A + \xi B + \xi^2 C = 0$.
- Das Dreieck (A, B, C) ist genau dann gleichseitig und negativ orientiert (linksdrehend), wenn $r = 0$ oder, äquivalent, wenn $A + \xi^2 B + \xi C = 0$.

Aufgabe 17. (Satz von Napoleon.) Errichtet man über jeder Seite eines Dreiecks ABC ein gleichseitiges Dreieck, so daß alle drei gleichseitigen Dreiecke außerhalb von ABC liegen, so bilden die Schwerpunkte der gleichseitigen Dreiecke wiederum ein gleichseitiges Dreieck. (Tip: Benutzen Sie Aufgabe 16.)

An dem vorhergehenden Satz ist bemerkenswert, daß aus einem beliebigen Dreieck ein gleichseitiges Dreieck entsteht, und zwar auf völlig natürliche Weise und ohne Annahme jeglicher Symmetrie. Es gibt eine Reihe Resultate dieser Art, von denen der *Satz von Morley (1899)* wohl am berühmtesten ist. Alain Connes hat 1998 einen neuen Beweis dieses Satzes vorgelegt, der ebenfalls auf komplex eindimensionaler affiner Geometrie und der Fourierzerlegung von Dreiecken basiert. Diesen neuen Beweis findet man zum Beispiel im Kapitel 5.9.2 des Skriptums "Lineare Algebra II" von Dirk Ferus oder auf der französischen Wikipedia–Seite zum Satz von Morley. Dem interessierten Leser sei empfohlen, einen Blick in die Originalarbeit von Alain Connes zu werfen:

Aufgabe 18. Werfen Sie einen kurzen Blick in den folgenden bemerkenswerten Artikel, der nur dreieinhalb Seiten lang und frei online[3] verfügbar ist:

Alain Connes, "A new proof of Morley's theorem."
Publications Mathématiques de l'IHÉS, S88 (1998), pp. 43–46.

(Dies ist der einzige mir bekannte neuere wissenschaftliche Artikel eines Fields Medallisten, der nur Wissen aus der "Linearen Algebra" Vorlesung voraussetzt.)

[3] Den Link finden Sie z.B. auf der englischen Wikipedia–Seite zum Satz von Morley.