Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen SS 2015

Clusteralgebren : Übungsblatt 1

Tetsuya Nakamura 16. April 2015

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und bis vor der Vorlesung am 23. April abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Bestimmen Sie alle Isomorphieklassen von Köchern, die durch Verkettung von Mutationen aus dem Köcher

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$$

erhalten werden können.

Aufgabe 2. Definieren Sie eine Cluster–Struktur auf den Koordinaten der Menge

$$SL_2(\mathbb{C}) = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4 \mid ad - bc = 1\}.$$

Definition: Eine ganzzahlige $n \times n$–Matrix $B = (b_{ij})$ heißt *schiefsymmetrisierbar*, wenn die Bedingungen aus Aufgabe 3 erfüllt sind. Die *Mutation* $B' = \mu_k(B)$ von B ist definiert als

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & \text{falls } i = k \text{ oder } j = k, \\ b_{ij} + |b_{ik}|b_{kj} & \text{falls } i \neq k \neq j \text{ und } b_{ik}b_{kj} > 0, \\ b_{ij} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung: Identifiziert man Köcher mit ganzzahligen schiefsymmetrischen Matrizen, so stimmen beide Begriffe von Mutation überein.

Aufgabe 3. Sei $B = (b_{ij})$ eine ganzzahlige $n \times n$–Matrix. Zeigen Sie, daß es genau dann rationale $d_i > 0$, $i = 1, ..., n$ gibt mit

$$d_i b_{ij} = -d_j b_{ji} \qquad \text{für alle } i, j,$$

wenn es rationale $d'_i > 0$, $i = 1, ..., n$ gibt mit

$$b_{ij} d'_j = -b_{ji} d'_i \qquad \text{für alle } i, j.$$

Die d_i (bzw. d'_i) können dann ganzzahlig und teilerfremd gewählt werden.

Aufgabe 4. Sei $B = (b_{ij})$ eine ganzzahlige $n \times n$–Matrix. Zeigen Sie:

i) Ist B schiefsymmetrisch, so ist auch $B' = \mu_k(B)$ schiefsymmetrisch.
ii) Es gilt $\mu_k^2 = \mathrm{Id}$.