Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen SS 2015

Clusteralgebren : Übungsblatt 3

Tetsuya Nakamura 30. April 2015

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und bis vor der Vorlesung am 7. Mai abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Bezeichne Q den Köcher

$$\bullet \Longrightarrow \bullet$$

und sei $s = (Q, (x_0, x_1))$ ein initialer Seed.

(i) Erklären Sie, wie die rekursive Folge

$$x_{n+1}x_{n-1} = 1 + x_n^2$$

als Sequenz von Mutationen von s interpretiert werden kann.

(ii) Zeigen Sie, daß

$$z = \frac{x_n^2 + x_{n+1}^2 + 1}{x_n x_{n+1}}$$

eine Erhaltungsgröße, also unabhängig von n ist. Folgern Sie, daß

$$x_{n+1} = z x_n - x_{n-1}.$$

(iii) Zeigen Sie,

- daß die Anzahl der durch Sequenzen von Mutationen aus s entstehenden Seeds unendlich ist, und
- daß die Clustervariablen aller entstehenden Seeds Laurentpolynome in den Anfangsvariablen sind (*Laurent Phänomen*).

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(i) Für alle $i_1, ..., i_k$ und $j_1, ..., j_k$ gilt

$$\Delta_{i_1,\ldots,i_k}\Delta_{j_1,\ldots,j_k} = \sum_{l=1}^{k} \Delta_{i_1,\ldots,i_{l-1},j_k,i_{l+1},\ldots,i_k}\Delta_{j_1,\ldots,j_{k-1},i_l}.$$

(ii) Für alle $i_1, ..., i_{k-2}$ und a, b, c, d gilt

$$\Delta_{i_1,\ldots,i_{k-2},a,c}\Delta_{i_1,\ldots,i_{k-2},b,d} = \Delta_{i_1,\ldots,i_{k-2},a,b}\Delta_{i_1,\ldots,i_{k-2},c,d} + \Delta_{i_1,\ldots,i_{k-2},a,d}\Delta_{i_1,\ldots,i_{k-2},b,c}.$$

(iii) Für einen Punkt in $Gr_k(n)$ bezeichne $\mathcal{M}$ die Menge aller $I \in \binom{[n]}{k}$ mit $\Delta_I \neq 0$. Für I, $J \in \mathcal{M}$ gilt, daß es für alle $i \in I$ ein $j \in J$ gibt mit $I \backslash \{i\} \cup \{j\} \in \mathcal{M}$.

Aufgabe 3. Beweisen Sie die in der Vorlesung angegebenen Formeln für die Mutation von Kanten– und Facettenvariablen unter einem Square–Move.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß die Punkte in $Gr_2(4)$, dessen Plückerkoordinaten alle (echt) positiv sind, mittels Boundary–Measurement bezüglich des in der Vorlesung diskutierten bipartiten Graphen erhalten werden können. Zeigen Sie weiter, daß die Punkte in $Gr_2(4)$, dessen Plückerkoordinaten alle nicht–negativ sind, mittels Boundary–Measurement erhalten werden können, wenn man aus dem Graphen Kanten entfernt (betrachten Sie nur den Fall $\Delta_{12} > 0$).