Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen

Analysis II : Übungsblatt 1

Jonas Ziefle 20. April 2017

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 2. Mai vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Finden Sie ein Beispiel für eine Familie von offenen Mengen, deren Durchschnitt nicht offen ist. Finden Sie analog ein Beispiel für eine Familie von abgeschlossenen Mengen, deren Vereinigung nicht abgeschlossen ist.

Aufgabe 2. Die Menge $\{y \in X \mid d(x,y) \leq 1\}$ in einem metrischen Raum (X,d) ist immer abgeschlossen. Anders als im Euklidischen Fall ist sie jedoch im allgemeinen nicht gleich dem Abschluß $\overline{U_1(x)}$ von $U_1(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < 1\}$.

Aufgabe 3. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Menge $[a,b] \cap \mathbb{Q}$ gleichzeitig offen und abgeschlosen in $\mathbb{Q}$ (bezüglich der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik)?

Aufgabe 4. (Nur für BaSc) Sei $Y \subset X$ Teilmenge eines metrischen Raumes (X,d). Eine Teilmenge $O \subset Y$ ist offen bezüglich der Spurmetrik d_Y genau dann, wenn es eine offene Menge $U \subset X$ gibt mit $O = Y \cap U$.

Aufgaben für die Übungen:

Aufgabe 5.* Zeigen Sie: die Menge $]0,1[$ ist offen in $\mathbb{R}$, aber die Menge $\{(x,0) \mid x \in]0,1[\}$ ist nicht offen in $\mathbb{R}^2$. Welche ist abgeschlossen?

Aufgabe 6.*

a) Zeigen Sie: endliche Mengen in metrischen Räumen sind abgeschlossen.
b) Wie sieht die Topologie (d.h. die Menge aller offenen Mengen) eines metrischen Raumes aus, in dem alle endlichen Mengen offen sind? Finden Sie einen metrischen Raum mit dieser Eigenschaft und unendlich vielen Elementen.

Aufgabe 7.* Sei $Y \subset X$ Teilmenge eines metrischen Raumes (X,d). Zeigen Sie: der Abschluß $\bar{Y}$ ist genau gleich der Menge aller Grenzwerte von Folgen in Y.

Aufgabe 8.* Seien Y_1, Y_2 Mengen in einem metrischen Raum. Zeigen Sie:

a) $\mathring{Y}_1 \cap \mathring{Y}_2 = (Y_1 \cap Y_2)^\circ$
b) $\mathring{Y}_1 \cup \mathring{Y}_2 \subset (Y_1 \cup Y_2)^\circ$

Zeigen Sie an einem Beispiel, daß in b) nicht "=" gilt. Finden Sie die entsprechenden Aussagen über Abschlüsse von Mengen.