Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen

Analysis II : Übungsblatt 3

Jonas Ziefle 4. Mai 2017

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 16. Mai vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß

$$d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert, die nicht vollständig ist, aber die gleichen offenen Mengen besitzt wie die Standardmetrik.

Aufgabe 2. Sei $f\colon K \to X$ eine stetige und bijektive Abbildung von einem kompakten metrischen Raum K in einen metrischen Raum X. Zeigen Sie: f^{-1} ist stetig und X ist kompakt.

Aufgabe 3. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Für $x \in X$ und $A, B \subset X$ definiere:

$$d(x,B) := \inf\{d(x,y) \mid y \in B\} \quad \text{und} \quad d(A,B) := \inf\{d(y,y') \mid y \in A, y' \in B\}$$

Zeigen Sie:

a) Die Abbildung $x \in X \mapsto d(x,B)$ ist stetig.
b) Es gilt $d(x,B) = 0 \iff x \in \bar{B}$
c) Für A kompakt und B abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$ gilt $d(A,B) > 0$. Zeigen Sie an einem Beispiel, daß das nicht gilt wenn A nur abgeschlossen ist.

Aufgabe 4. (Nur für BaSc) Sei K ein kompakter metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K mit der Eigenschaft, daß jede konvergente Teilfolge gegen x konvergiert. Zeigen Sie, daß $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst gegen x konvergiert. Demonstrieren Sie anhand eines Gegenbeispiels, daß die Aussage nicht stimmt, wenn K nicht kompakt ist.