Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen

Analysis II : Übungsblatt 4

Jonas Ziefle 11. Mai 2017

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 23. Mai vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Sei $W \subset V$ ein Untervektorraum eines normierten Vektorraumes. Zeigen Sie, daß $\bar{W}$ wieder ein Untervektorraum ist. Zeigen Sie weiter, daß $\mathring{W} = \emptyset$ falls nicht $W = V$.

Aufgabe 2. Untersuchen Sie die Folge $f_n(x) = x^n$ in $C([0,1], \mathbb{R})$ auf punktweise Konvergenz und auf Konvergenz bezüglich der Supremumsnorm. Zeigen Sie, daß die Folge bezüglich der Norm $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)| dx$ gegen die Nullfunktion konvergiert.

Aufgabe 3. Sei f_n eine Folge in $C^1([a,b], \mathbb{R})$, so daß

- $f_n(x)$ für ein $x \in [a,b]$ konvergiert und
- f_n' eine Cauchy–Folge bezüglich der Supremumsnorm ist.

Zeigen Sie: es gibt eine Funktion $f \in C^1([a,b], \mathbb{R})$, so daß f_n gleichmäßig gegen f und f_n' gleichmäßig gegen f' konvergiert.

Aufgabe 4. (Nur für BaSc) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(i) Für $p \in [1, \infty[$ ist der Raum

$$\ell^p(\mathbb{K}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}$$

mit $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p}$ ein Banachraum.

(ii) Der Raum

$$\ell^\infty(\mathbb{K}) = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \text{beschränkte Folge in } \mathbb{K} \}$$

mit $\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ ist ein Banachraum.

(iii) Die Höldersche Ungleichung überträgt sich auf obige Räume.