Prof. Dr. Christoph Bohle — Tübingen

Analysis II : Übungsblatt 7

Jonas Ziefle — 1. Juni 2017

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 20. Juni vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Betrachte Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)) = (st, s\cos(t), \sin(t))$$

und

$$g(x,y,z) = w(x,y,z) = xy + yz + zx.$$

"Überprüfen" Sie die Kettenregel durch Berechnen von $Dg_{|q}$, $Df_{|p}$, $Dg_{|q}Df_{|p}$ und $D(g\circ f)_{|p}$, wobei $p = (0,1)$ und $q = f(p)$.

Aufgabe 2. Prüfen Sie die folgenden Abbildungen auf Differenzierbarkeit im Punkt p und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung.

a) $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto (x^2y, z\log(1+x^2), e^{xz})$ mit $p = (x_0, y_0, z_0)$.
b) $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y) \mapsto (x, y, \sin(x+y) + \cos(y) + x)$ mit $p = (\pi/2, 0)$.

Berechnen Sie für *b*) die Richtungsableitung in p in Richtung $v = (1,1)$.

Aufgabe 3. a) Sei $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$ eine bijektive differenzierbare Abbildung, deren Inverse $g := f^{-1}$ auch differenzierbar ist. Berechnen Sie $Dg_{|q}$ im Punkt $q = f(p)$.

b) Betrachten Sie die Abbildung

$$\Phi\colon \mathbb{R}_+ \times]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}, \qquad (r,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Skizzieren Sie die Bilder der Koordinatenlinien unter Φ. Skizzieren Sie am Beispiel von zwei Punkten p_1 und p_2 die Spaltenvektoren der Jacobimatrix von Φ in p_i als Vektoren mit Fußpunkt $\Phi(p_i)$.

c) Zeigen Sie, daß die Umkehrabbildung von Φ differenzierbar ist und berechnen Sie deren Jacobimatrix. (Wo ist Φ^{-1} genau definiert?)

d) Kann man Φ fortsetzen zu einem Homöomorphismus mit Bild $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$?

Aufgabe 4. (Nur für BaSc) Seien A, $B \in M(n\times n, \mathbb{R})$ und b, c, $d \in \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Abbildungen:

a) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto A(x+b) + \langle c, x\rangle d$
b) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle x, Bx\rangle^2 + \langle b - Ax, b\rangle$
c) $f\colon \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\langle x, Ax\rangle}{\langle x, x\rangle}$