Analysis II : Übungsblatt 8

Jonas Ziefle 13. Juni 2017

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 27. Juni vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Skizzieren Sie die Niveaulinien von

$$f(x,y) = x^2 - 2y^2 - 2$$

und zeichnen Sie an mindestens 4 Punkten auf verschiedenen Niveaulinien den Gradienten von f.

Aufgabe 2. Seien $r(t)$, $h(t)$ differenzierbare reellwertige Funktionen auf einem Intervall I und

$$f\colon]-\pi,\pi[\times I \to \mathbb{R}^3 \qquad (\vartheta,t) \mapsto \begin{pmatrix} r(t)\cos(\vartheta) \\ r(t)\sin(\vartheta) \\ h(t) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

a) Die partiellen Ableitungsvektoren $\frac{\partial f}{\partial \vartheta}$ und $\frac{\partial f}{\partial t}$ stehen für alle (ϑ,t) zueinander senkrecht.

b) Für $r(t) = \sqrt{1-t^2}$ und $h(t) = t$, $t \in I =]-1,1[$ ist
$$\left\|\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\right\| \cdot \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\| = 1.$$

c) Für $r(t) = \frac{1}{\cosh(t)}$ und $h(t) = \tanh(t)$ und $t \in I = \mathbb{R}$ ist
$$\left\|\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\right\| = \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|.$$

(Die Abbildungen in b) und c) sind flächentreue bzw. winkeltreue "Erdkarten".)

Aufgabe 3. Berechnen Sie mit der Produktregel die Ableitung von

$$f\colon Mat(n\times n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \qquad A \mapsto \det(A)$$

im Punkt $p = \mathrm{Id}$.

Aufgabe 4. (Nur für BaSc) Sei $f, g\colon V \to W$ Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen gegeben durch $f(x) = A(x)$ bzw. $g(x) = b(x,x)$ mit $A \in L(V,W)$ und $b \in L^2(V,W)$.

a) Berechen Sie die ersten drei Ableitungen von f und g.

b) Wie sehen f und g in Koordinaten aus, wenn man $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}$ setzt? Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen durch Bestimmung der partiellen Ableitungen.