Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen

Analysis II : Übungsblatt 9

Jonas Ziefle 22. Juni 2017

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 4. Juli vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von

a) $f(x,y) = x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 10$,
b) $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{xy}$,
c) $f(x,y,z) = xyz\sin(x+y+z)$, und
d) $f(x,y,z) = \frac{xe^y}{z}$, $z \neq 0$.

Aufgabe 2. Sei

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ sowie $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß eine zweimal differenzierbare Funktion

$$f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

mit in jedem Punkt $p \in U$ positiv semi–definiter zweiter Ableitung $D^2 f_{|p}$ konvex ist, d.h. für alle p, $q \in U$, deren Verbindungslinie in U enthalten ist, gilt

$$f((1-\lambda)p + \lambda q) \leq (1-\lambda)f(p) + \lambda f(q)$$

für alle $\lambda \in [0,1]$.

Aufgabe 4. (Nur für BaSc)

a) Bestimmen Sie alle zweimal differenzierbaren Funktionen $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}g(u,v) = 0.$$

b) Bestimmen Sie alle zweimal differenzierbaren Lösungen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der Wellengleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}f(t,x) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}f(t,x) = 0.$$

(Tip: machen Sie den Ansatz $f(t,x) = g(x+t, x-t)$.)