Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen

Analysis II : Übungsblatt 11

Jonas Ziefle g. Juli 2017

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 18. Juli vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x,y) \mapsto (x(1-y), xy)$$

bildet den Streifen $\mathbb{R}_+ \times]0,1[$ diffeomorph auf einen offenen Quadranten in $\mathbb{R}^2$ ab. Skizzieren Sie die partiellen Ableitungsvektoren $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ beispielhaft an einigen Punkten des Quadranten.

Aufgabe 2. Eine Lösung des Gleichungssystems

$$x^3 + y^3 + z^3 = 7$$
$$xy + xz + yz = -2$$

ist $(x_0, y_0, z_0) = (2, -1, 0)$. Zeigen Sie, daß es eine Umgebung dieser Lösung gibt, so daß man die Menge aller Lösungen des Systems in dieser Umgebung darstellen kann als Graph einer Funktion von x. Berechnen Sie die Ableitung dieser Funktion im Punkt $x = 2$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß die Gleichung

$$xe^y + ye^x = 0$$

um den Punkt $(0,0)$ eine lokale C^∞–Lösung $y = g(x)$ hat. Berechnen Sie $g'(0)$ und $g''(0)$.

Aufgabe 4. (Nur für BaSc) Zeigen Sie: ist die Hessesche Matrix einer C^2–Funktion

$$f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ in einem kritischen Punkt $p \in U$ nicht–ausgeartet (d.h. invertierbar), so ist p ein isolierter kritischer Punkt.