Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen

Analysis II : Übungsblatt 13

Jonas Ziefle 27. Juli 2017

Freiwillige Zusatzaufgaben.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto x + \pi/2 - \arctan(x)$$

die Ungleichung

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \qquad \text{für alle} \quad x \neq y$$

erfüllt. Hat sie einen Fixpunkt? Kann man den Banachschen Fixpunktsatz hier anwenden?

Aufgabe 2. Beweisen Sie:

a) Die Operatornorm auf dem Raum der stetigen linearen Operatoren $L(V, V)$ eines normierten Vektorraumes V erfüllt

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \qquad \text{für alle} \quad A, B \in L(V, V).$$

b) Ist V ein Banachraum, so konvergiert die Exponentialreihe

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

für jeden Operator $A \in L(V, V)$. (Benutzen Sie, daß $L(V, V)$ mit der Operatornorm ebenfalls ein Banachraum ist.)

Aufgabe 3. Leiten Sie den Satz über die Umkehrabbildung aus dem Satz über implizite Funktionen her.

Aufgabe 4. Zeigen Sie: die Abbildung

$$\psi\colon]0, 3\pi[\to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto (\sin(t/2), \sin(t))$$

ist eine injektive Immersion. Ist $M = \{\psi(t) \mid t \in]0, 3\pi[\}$ eine Untermannigfaltigkeit? Ist $\psi^{-1}\colon M \to]0, 3\pi[$ stetig? (Skizzieren Sie M.)

Aufgabe 5. Zeigen Sie, daß die Abbildungen Φ, ψ und h in Beispiel 4.7 ein Diffeomorphismus, eine Immersion bzw. eine Submersion sind.

Aufgabe 6. Ist A eine symmetrische $n \times n$–Matrix. Zeigen Sie, daß die Quadrik

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle Ax, x \rangle = 1\}$$

eine Untermannigfaltigkeit ist. Gilt das auch für die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle Ax, x \rangle = 0\}?$$

Aufgabe 7. Man bestimme den achsenparallelen Quader größten Volumens, der dem Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

einbeschrieben ist.

Aufgabe 8. Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Man kann wie folgt zeigen, daß A eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren besitzt:

i) Die Funktion $f(x) = \langle Ax, x \rangle$ nimmt auf $S^{n-1} = \{x \mid \langle x, x \rangle = 1\}$ ein Maximum an in einem Punkt x_n,
ii) x_n ist Eigenvektor von A,
iii) A läßt den Untervektorraum senkrecht auf x_n invariant,
iv) per Induktion folgt die Behauptung.

Führen Sie die Details aus.