Analysis III : Übungsblatt 1

Jonas Zieffle

19. Oktober 2017

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 2. November vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Die Menge aller reellen Zahlen, in deren Dezimaldarstellung die Ziffer 2 vorkommt, ist Borel-messbar.

Aufgabe 2. Jede der folgenden Mengen erzeugt die Borel- σ -Algebra des $\mathbb{R}^n$:

- die Menge der abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$,
- die Menge der kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$,
- die Menge der halboffenen Quader in $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3. Jede monotone Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist Borel-messbar.

Aufgabe 4. Sei Ω eine überabzählbare Menge. Zeigen Sie, daß

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega \mid A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar} \}$$

eine σ -Algebra ist und

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ abzählbar} \\ 1 & \text{falls } A^c \text{ abzählbar} \end{cases}$$

ein Maß auf $\mathcal{A}$ definiert.

Aufgaben für die Übungen:

Aufgabe 5*. Ist p ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$, so gilt für alle $A \in \mathcal{A}$

$$p(A^c) = 1 - p(A).$$

Insbesondere gilt $p(A) \in [0, 1]$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Aufgabe 6*. Ist Ω abzählbar und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, so liefert

$$\mu(A) = \sum_{\omega \in A} \rho(\omega)$$

eine 1-1-Beziehung zwischen Maßen $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und ("Dichte"-) Funktionen $\rho: \Omega \rightarrow [0, \infty]$.

Aufgabe 7*. Ist $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ eine Abbildung und $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra auf Ω_1 . Dann ist

$$f_*(\mathcal{A}) = \{B \subset \Omega_2 \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

die größte σ -Algebra auf Ω_2 , bezüglich der f meßbar ist.

Aufgabe 8*. Eine Menge in $\mathbb{R}$ ist offen genau dann, wenn Sie eine abzählbare Vereinigung von disjunkten, offenen Intervallen ist.