Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen

Analysis III : Übungsblatt 2

Jonas Ziefle 26. Oktober 2017

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 7. November vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Sei μ ein Borel–Maß auf $\mathbb{R}^n$, das nur Werte in $\{0, 1\}$ annimmt. Dann gibt es $x_0 \in \mathbb{R}^n$, so daß μ gleich dem Dirac–Maß δ_{x_0} ist.

Aufgabe 2. Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen sowie das Cantor–Diskontinuum sind Nullmengen bezüglich des Lebesgue–Maßes λ auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{R}^{n-1}$ ist eine Nullmenge bezüglich des Lebesgue–Maßes auf $\mathbb{R}^n$ (wobei $\mathbb{R}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$).
b) Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, so daß $\mathring{Q}' \subset Q \subset Q'$ für einen kompakten Quader Q'. Dann ist Q Lebesgue–messbar und $\lambda(Q) = \lambda(Q')$.

Aufgabe 4. Sei μ^* ein äußeres Maß auf X. Zeigen Sie:

a) Ist $N \subset X$ eine Nullmenge bezüglich μ^*, d.h. gilt $\mu^*(N) = 0$, so ist N messbar.
b) Der Maßraum $(X, \mathcal{M}(\mu^*), \mu^*_{|\mathcal{M}(\mu^*)})$ ist vollständig.