
Analysis III : Übungsblatt 3

Jonas Zieffle

2. November 2017

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 14. November vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Sei $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge messbarer Funktionen auf einem Messraum. Dann ist $\{x \in \Omega \mid f_n(x) \text{ konvergiert}\}$ eine messbare Menge.

Aufgabe 2. Sei $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ eine messbare Funktion auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Dann gilt für $\alpha > 0$

$$\mu(\{x \mid f(x) \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} f \, d\mu.$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

- i) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ eine Lebesgue-messbare Funktion und λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$. Dann definiert

$$\mu(A) = \int_A f \, d\lambda := \int_{\mathbb{R}} f \chi_A \, d\lambda$$

ein Maß auf der σ -Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen.

- ii) Konstruieren Sie ein Maß μ auf $\mathbb{R}$ mit $\mu(\mathbb{R}) = 1$, so daß eine Menge eine μ -Nullmenge ist genau dann wenn sie eine λ -Nullmenge ist.

Aufgabe 4. Sei $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ eine messbare Funktion mit $\int_{\Omega} f \, d\mu < \infty$ auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Zeigen Sie, daß $\{x \in \Omega \mid f(x) = \infty\}$ eine Nullmenge ist. Zeigen Sie weiter, daß $\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$ eine σ -endliche Menge ist, d.h. sich als eine abzählbare Vereinigung von Mengen endlichen Maßes darstellen läßt.