Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen

Analysis III : Übungsblatt 4

Jonas Ziefle 9. November 2017

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 21. November vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine messbare Menge und $f\colon A \to [0, \infty[$ eine messbare Funktion. Dann ist das Lebesguemaß $\lambda_2(B)$ der Menge

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A, y \in [0, f(x)]\}$$

gleich dem Lebesgueintegral von f, also

$$\lambda_2(B) = \int_A f \, d\lambda_1 = \int_A f(x) d\lambda_1(x).$$

Aufgabe 2.

a) Finden Sie ein (Gegen–)Beispiel, welches zeigt,
   i) daß der Satz von der monotonen Konvergenz nicht gilt, wenn man keine monotone Funktionenfolge nimmt und
   ii) der Satz von der dominierten Konvergenz nicht gilt, wenn man nicht die Existenz einer dominierenden Funktion fordert.

b) Finden Sie eine Folge positiver Lebesgue–integrierbarer Funktionen auf $[0, 1]$, die nirgenwo Punktweise konvergiert, deren Integrale aber gegen 0 konvergieren.

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

i) Ist $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ eine integrierbare Funktion, so gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \delta$ gilt $\int_A |f| d\mu < \epsilon$. (Tip: Zeigen Sie, daß $\int_{F_n} |f| d\mu$ mit $F_n = \{x \mid |f(x)| \geq n\}$ gegen Null konvergiert für $n \to \infty$.)

ii) Für $\Omega = \mathbb{R}$ mit Lebesgue–Maß definiert $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f \, d\mu$ eine gleichmäßig stetige Funktion.

Aufgabe 4. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue–integrierbare Funktion. Dann gilt fast überall (d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ außerhalb einer Nullmenge)

$$\lim_{n\to\infty} f(x + n) = \lim_{n\to\infty} f(x - n) = 0.$$

(Tip: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können Sie $x \in [0, 1]$ und $f \geq 0$ annehmen.)