

Analysis III : Übungsblatt 5

Jonas Ziefle

16. November 2017

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 28. November vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

- i) Eine Regelfunktion f auf einem kompakten Intervall ist auch Lebesgue-integrierbar und beide Integrale von f sind gleich.
- ii) Eine Regelfunktion f auf einem nicht kompakten Intervall ist genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn das uneigentliche Regelintegral von $|f|$ existiert. Das uneigentliche Regelintegral von f stimmt dann mit dem Lebesgue-Integral überein.

(Erinnerung: eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Regelfunktion*, wenn sie auf jedem kompakten Teilintervall gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximiert werden kann. Ist I kompakt, so ist das *Regelintegral* einer Regelfunktion f definiert als der Limes der Integrale einer auf I gleichmäßig approximierenden Folge von Treppenfunktionen. Ist I nicht kompakt, so ist das *uneigentliche Regelintegral* falls existent definiert als die Summe der Grenzwerte der Regelintegrale über $[a_n, b]$ und $[b, c_n]$, wobei $a_n < b < c_n$ in I liegen und a_n, c_n gegen die Intervallgrenzen bzw. $\mp\infty$ konvergieren. Vgl. Königsberger oder Ferus Analysis I)

Aufgabe 2. Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, daß für $a > 0$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2/2} e^{-ixt} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-t^2/2a}.$$

Es reicht, den Fall $a = 1$ zu betrachten. (Den allgemeinen Fall kann man durch eine lineare Koordinatentransformation zeigen.)

- i) Zeigen Sie, daß $g(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} e^{-ixt} dx$ existiert und differenzierbar ist und der Differentialgleichung $g'(t) = -tg(t)$ genügt.
- ii) Folgern Sie die Aussage im Fall $a = 1$. (Benutzen Sie $g(0) = \sqrt{2\pi}$, das werden Sie auf dem nächsten Blatt zeigen.)

Aufgabe 3. Man Zeige:

- i) Die Γ -Funktion ist beliebig oft differenzierbar und

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} (\ln t)^n dt$$

für $n \in \mathbb{N}$ (wobei $n = 0$ die Definition von Γ liefert).

- ii) Die Funktion

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} dt = 1/x$$

kann man beliebig oft unter dem Integral differenzieren. Folgern Sie die Formel:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$$

Aufgabe 4. Seien $p, q \in [1, \infty]$ mit $p < q$ und λ das Lebesguemaß. Zeigen Sie:

- i) $L^q([0, 1], \lambda) \subset L^p([0, 1], \lambda)$,
- ii) $\ell^p \subset \ell^q$.
- iii) Keiner der Räume $L^p(\mathbb{R}, \lambda)$ und $L^q(\mathbb{R}, \lambda)$ ist im jeweils anderen enthalten.