
 Analysis III : Übungsblatt 6

Jonas Ziefle

23. November 2017

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 5. Dezember vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$. (Mittels Fubini können Sie dieses Integral auf das Doppelintegral $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy$ zurückführen, welches man berechnen kann, indem man auf Polarkoordinaten transformiert.)

Aufgabe 2. Sei $a_n, n \in \mathbb{N}$ eine streng monotone Folge reeller Zahlen mit $a_0 = 0$ und Grenzwert 1. Sei ψ_n eine Folge stetiger reellwertiger Funktionen auf $[0, 1]$ mit $\psi_n \geq 0$ und $\int \psi_n = 1$, so daß der Träger von ψ_n in $]a_n, a_{n+1}[$ liegt. Eine Funktion $f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\psi_n(x) - \psi_{n+1}(x)) \psi_n(y)$. Berechnen Sie $\int_0^1 (\int_0^1 f(x, y) dx) dy$ und $\int_0^1 (\int_0^1 f(x, y) dy) dx$. Ist f integrierbar? Ist jede stetige reellwertige Funktion auf einem Kompaktum in \mathbb{R}^2 integrierbar?

Aufgabe 3. Die stetige Funktion

$$f:]0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2 + y^2 < 1 \\ 1 & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

ist integrierbar. Berechnen Sie das Integral über x für $y = 0$. Widerspricht das dem Satz von Fubini?

Aufgabe 4. Berechnen Sie Volumen und Trägheitsmoment um die x -Achse der folgenden Körper (d.h. integrieren Sie die Funktion $f(x, y, z) = 1$ bzw. $g(x, y, z) = y^2 + z^2$ über die Körper.)

- i) $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq a, y^2 + z^2 \leq r^2\}$
- ii) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1\}$
- iii) $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$