Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen

Analysis III : Übungsblatt 8

Jonas Ziefle 7. Dezember 2017

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 19. Dezember vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Sei

$$\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy$$

eine glatte 1–Form auf einer konvexen offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

$$d\omega = 0$$

ist eine notwendige Bedingung dafür, daß ω gleich der Ableitung einer Funktion $f \in C^\infty(U) = \Omega^0(U)$ ist. Ist diese Bedingung auch hinreichend? Versuchen Sie zuerst, eine Stammfunktion f zu

$$\omega = (7x^6y^2 + 4x^3)dx + (2x^7y + y)dy$$

zu finden, also eine Funktion $f(x,y)$ mit $df = \omega$.

Aufgabe 2. Sei $f\colon U \to V$ eine glatte Abbildung zwischen offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ und $\omega \in \Omega^k(V)$. Zeigen Sie, daß

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega).$$

Aufgabe 3. Sei V ein n–dimensionaler Vektorraum.

- Gegeben $\omega \in \Lambda^n(V^*)\backslash\{0\}$, so nennen wir eine Basis v_1, ..., v_n *positiv*, wenn $\omega(v_1, ..., v_n) > 0$, und sonst *negativ*. Zeigen Sie, daß zwei Basen genau dann äquivalent (wie in der Vorlesung definiert) sind, wenn sie entweder beide positiv oder beide negativ sind.
- Erklären Sie, warum beide in der Vorlesung gegebenen Definitionen einer Orientierung auf V "äquivalent" sind.
- Zeigen Sie, daß es auf einem orientierten euklidischen Vektorraum V eine eindeutige Form $\omega \in \Lambda^n(V^*)$ gibt mit

  $$\omega(v_1, ..., v_n) = 1$$

  für eine (und damit jede) positive Orthonormalbasis v_1, ..., v_n.

Aufgabe 4. Ein Vektorfeld X auf $U \subset \mathbb{R}^3$ definiert eine 1–Form $\omega^1 = X \cdot d\vec{s}$ und eine 2–Form $\omega^2 = X \cdot d\vec{S}$. Zeigen Sie:

$$d\omega^1 = \operatorname{rot}(X) \cdot d\vec{S}$$

und

$$d\omega^2 = \operatorname{div}(X) \cdot dV.$$