Analysis III : Übungsblatt 9

Jonas Ziefle 14. Dezember 2017

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 9. Januar vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Seien $X_1(x,y,z) = \frac{1}{3}(x,y,z)$ und $X_2(x,y,z) = (1,0,0)$. Berechnen Sie den Fluß von X_1 und X_2 durch die Einheitssphäre einmal direkt (unter Benutzung von sphärischen Koordinaten) und einmal über den Satz von Gauss.

Aufgabe 2. Seien wie oben $X_1(x,y,z) = \frac{1}{3}(x,y,z)$ und $X_2(x,y,z) = (1,0,0)$. Berechnen Sie, wie oben einmal direkt und einmal über den Satz von Gauss, den Fluß von X_1 und X_2 durch *i)* die Oberfläche eines Würfels mit Kantenlänge 2 und Zentrum 0 und *ii)* die Oberfläche eines Zylinders mit Höhe 2, Radius π und Zentrum 0.

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

i) Für ein Vektorfeld X und eine Funktion f auf $U \subset \mathbb{R}^3$ gilt:
$$\operatorname{rot}(fX) = \operatorname{grad}(f) \times X + f \operatorname{rot}(X),$$
$$\operatorname{div}(fX) = \langle \operatorname{grad}(f), X \rangle + f \operatorname{div}(X).$$
(Tip: Nutzen Sie die Produktregel für die äußere Ableitung.)

ii) Seien $X_1(x,y,z) = (x,y,z)$ und $X_2(x,y,z) = (-y,x,0)$. Finden Sie nicht–triviale Funktionen f_1 und f_2, die nur vom Abstand zum Nullpunkt bzw. zur z–Achse abhängen, so daß gilt
$$\operatorname{div}(f_1 X_1) = 0 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{rot}(f_2 X_2) = 0.$$
(Tip: die Funktionen können nicht auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert sein.)

iii) Berechnen Sie den Fluss von $f_1 X_1$ durch die Einheitskugel und die Zirkulation von $f_2 X_2$ entlang des Einheitskreises in der $z = 0$–Ebene. Warum widerspricht das Ergebnis nicht den Sätzen von Gauss bzw. Stokes?

Aufgabe 4. In $V = \mathbb{R}^n$ induzieren das euklidische Skalarprodukt und die Determinante Isomorphismen zwischen V und $\bigwedge^1 V^*$ bzw. $\bigwedge^{n-1} V^*$: aus einem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ erhält man eine 1–Form ω^1 und eine $(n-1)$–Form ω^{n-1} durch
$$\omega^1 = \langle v, \_ \rangle \qquad \text{und} \qquad \omega^{n-1} = \det(v, \_, \ldots, \_).$$

a) Bestimmen Sie die Transformation auf Vektoren des $\mathbb{R}^2$, die man erhält, wenn man erst aus einem Vektor mittels der Metrik eine 1–Form erzeugt und dann mittels der Determinante wieder einen Vektor.

b) Zeigen Sie, daß für v, $w \in \mathbb{R}^3$ gilt:
$$(v\, d\vec{s}) \wedge (w\, d\vec{s}) = (v \times w)\, d\vec{S}.$$