

Analysis III : Übungsblatt 10

Jonas Zieffle

21. Dezember 2017

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 16. Januar vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Untersuchen Sie, welches der beiden Vektorfelder

$$V(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2x + \sin(z) \\ \cos(y) - y \sin(y) \\ x \cos(z) + 4e^{2z} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad W(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2yz \\ z + x \end{pmatrix}$$

sich als Gradient einer Funktion schreiben läßt. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Funktion.

Aufgabe 2. Bezeichne $Q = [0, 1]^3$ den Quader mit Kantenlängen 1 und ∂Q den Rand des Quaders (nach Außen orientiert). Berechnen Sie das Integral der 2-Form $\omega = f(x, y, z)dy \wedge dz$ über ∂Q für

$$a) f(x, y, z) = x \quad b) f(x, y, z) = x^2 \quad c) f(x, y, z) = y \quad d) f(x, y, z) = xyz.$$

Aufgabe 3. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand und

$$\omega = \frac{1}{2}(x dy - y dx).$$

Zeigen Sie, daß $\int_{\partial G} \omega$ gleich dem Flächeninhalt des Gebietes ist. Erklären Sie das Ergebnis, indem Sie im Falle eines polygonalen Randes den Wert der Integrale über die einzelnen Randstücke geometrisch Interpretieren. Skizzieren Sie den Fall eines Gebietes mit polygonalem Rand und $0 \notin G$.

Aufgabe 4. Sei $\omega \in \Omega^1(U)$, $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend. Zeigen Sie:

- a) $d\omega = 0$ gilt genau dann, wenn $\int_{\partial G} \omega = 0$ für alle Gebiete G mit stückweise glattem Rand und $\bar{G} \subset U$.
- b) Es gibt eine Funktion $f \in C^\infty(U) = \Omega^0(U)$ mit $\omega = df$ genau dann, wenn $\int_\gamma \omega = 0$ für alle geschlossenen Kurven γ in U .

Eine Form ω heißt *geschlossen* bzw. *exakt* falls $d\omega = 0$ bzw. $\omega = df$. Offenbar ist eine exakte Form immer geschlossen. Gilt auch die Umkehrung?