Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen SS 2018

Einführung in gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 2

Jonas Ziefle 8. Mai 2018

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 15. Mai vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Bestimmen Sie eine maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = 4t^3 x, \qquad x(0) = 1.$$

Erklären Sie, warum diese eindeutig ist. Zeigen Sie, daß die Picard–Folge gegen die maximale Lösung konvergiert.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Picard–Iteration sowie deren Grenzwert für das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = Ax, \qquad x(0) = x_0,$$

mit $A \in M(n \times n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi\colon \mathbb{R} \times U \to U$ eine C^k–Abbildung, $k \geq 1$ mit

a) $\Phi(0, x) = x$ für alle $x \in U$ und
b) $\Phi(t + s, x) = \Phi(t, \Phi(s, x))$ für alle $x \in U$ und t, $x \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie:

i) Für alle $x_0 \in U$ ist $\varphi(t) = \Phi(t, x_0)$ globale Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = v(x), \qquad x(0) = x_0,$$

wobei $v\colon U \to \mathbb{R}^n$ das durch

$$v(x) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \Phi(t, x)$$

gegebene C^{k-1}–Vektorfeld bezeichne.

ii) Die Bedingungen a) und b) sind äquivalent dazu, daß die Abbildung $\Phi_t\colon U \to U$, $x \mapsto \Phi(t, x)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus ist und

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \Phi_t \in Diff(U)$$

ein Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{R}$ in die Gruppe $Diff(U)$ der Diffeomorphismen von U nach U ist.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß

$$\Phi(t, x_0) = e^{tA}x_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}(tA)^n\right) x_0$$

mit $A \in M(n \times n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung das Anfangswertproblems

$$\dot{x} = Ax, \qquad x(0) = x_0$$

ist. Berechnen Sie $\Phi(t, x_0)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

explizit. Skizzieren Sie das dazugehörige Vektorfeld sowie die Orbits (Bahnen) der Gruppenwirkung $\Phi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.