Prof. Dr. Christoph Bohle | Tübingen SS 2018

Einführung in gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 3

Jonas Ziefle | 29. Mai 2018

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 5. Juni vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie, daß eine glatte Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M \to M$$

genau dann für alle s, t, $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in M$

$$\varphi(t; s, \varphi(s; t_0, x_0)) = \varphi(t; t_0, x_0) \qquad \text{und} \qquad \varphi(t_0; t_0, x_0) = x_0$$

erfüllt, wenn sie Fundamentallösung einer glatten Differentialgleichung ist, deren maximale Lösungen alle global existieren.

Aufgabe 2. Sei

$$\dot{x} = \psi(t, x)$$

eine Differentialgleichung auf $U = \mathbb{R} \times M$, deren maximale Lösungen alle global existieren.

i) Hat ψ Periode $\tau > 0$, d.h., gilt

$$\psi(t + \tau, x) = \psi(t, x)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x \in M$, so gilt für alle t, $s \in R$

$$g^{t+\tau}_{s+\tau} = g^t_s.$$

ii) Insbesondere gilt für alle $N \in \mathbb{N}$

$$g^{t_0+N\tau+s}_{t_0} = g^{t_0+s}_{t_0} \circ A^N,$$

wobei $A = g^{t_0+\tau}_{t_0}$.

iii) Berechnen Sie A für

$$\dot{x} = (\lambda + \sin(t))x,$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist. Gibt es λ, so daß alle maximalen Lösungen der Gleichung periodisch werden?

Aufgabe 3. Eine nicht–autonome Differentialgleichung

$$\dot{x} = \psi(t, x) \qquad \text{mit} \qquad \psi\colon U \subset R \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

kann man umschreiben in eine autonome Differentialgleichung

$$\dot{X} = V(X)$$

auf dem *erweiterten Phasenraum* U, indem man setzt

$$V(t,x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \psi(t,x) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß $x(t)$, $t \in I$ genau dann Lösung der nicht–autonomen Gleichung ist, wenn $X(t) = \begin{pmatrix} t \\ x(t) \end{pmatrix}$ eine Lösung der autonomen Gleichung ist. Erklären Sie, wie die Fundamentallösung der autonomen Gleichung mit der Fundamentallösung der nicht–autonomen Gleichung zusammenhängt.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die Fundamentallösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = t^2 x.$$

Schreiben Sie die Gleichung (wie in der vorhergehenden Aufgabe) um in eine autonome Differentialgleichung. Skizzieren Sie das Vektorfeld dieser autonomen Differentialgleichung. Was ist der Unterschied zum Richtungsfeld der nicht–autonomen Differentielgleichung?