Einführung in gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 4

Jonas Ziefle

12. Juni 2018

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 19. Juni vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Fundamentallösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

für

- i) $a = 1, b = 2$ und
- ii) $a = 3, b = 4$.

Für den Fall ii) skizziere man einige Integralkurven.

Aufgabe 2. Sei

$$G: J \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

eine C^{k+1} -Abbildung, $k \geq 0$. Zeigen Sie, daß (Links-)Multiplikation mit G aus Lösungen einer linearen Differentialgleichung $\dot{x} = A(t)x$ mit

$$A: J \rightarrow \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$$

vom Typ C^k Lösungen einer anderen linearen Differentialgleichung

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}(t)\tilde{x}$$

macht. Bestimmen Sie $\tilde{A}$. Zeigen Sie, daß es immer eine Transformation G gibt, für die

$$\tilde{A} \equiv 0$$

gilt. Berechnen Sie den Effekt dieser “trivialisierenden” Transformation auf Lösungen einer inhomogenen Gleichung der Form

$$\dot{x} = A(t)x + h(t).$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß die Wronski-Determinante einer matrixwertigen Lösung der linearen Differentialgleichung $\dot{x} = A(t)x$ die Differentialgleichung

$$\dot{W} = \text{Spur}(A(t))W$$

erfüllt. Folgern Sie, daß

$$W(t) = e^{\int_{t_0}^t \text{Spur}(A(\tau))d\tau} W(t_0)$$

für alle t, t_0 gilt. (Benutzen Sie, daß die Ableitung der Determinante $\det$ im Punkt $G \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ und in Richtung $H \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ gegeben ist durch

$$D(\det)|_G(H) = \det(G)\text{Spur}(HG^{-1}),$$

wie hoffentlich aus der Analysis 2 bekannt.)

Aufgabe 4. Sei $\gamma: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine glatte Kurve, die *nach Bogenlänge parametrisiert* ist, d.h.

$$T(t) = \dot{\gamma}(t)$$

hat Länge 1 für alle t . Sei $N(t) = J(T(t))$, wobei J die positive 90° -Drehung bezeichnet, und

$$\kappa(t) = \langle \dot{T}(t), N(t) \rangle$$

die sogenannte *Krümmung* der Kurve. Zeigen Sie, daß der “bewegte Rahmen” $F = (T(t), N(t))$ die Differentialgleichung

$$\dot{F}(t) = F(t) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) \\ \kappa(t) & 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Folgern Sie, daß es zu jeder glatten Funktion $\kappa: J \rightarrow \mathbb{R}$ bis auf Translation und Rotation genau eine nach Bogenlänge parametrisierte glatte Kurve γ gibt, deren Krümmung gleich κ ist.