Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen SS 2018

Einführung in gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 5

Jonas Ziefle 26. Juni 2018

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 3. Juli vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie eine Basis des Lösungsraums von $\dot{x} = Ax$.
b) Berechnen Sie eine Basis des Lösungsraums von $\dot{x} = -Ax$.
c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. Sei

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie eine Basis φ_1, φ_2, φ_3 des Lösungsraums von $\dot{x} = A(t)x$ mit

$$\varphi_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \varphi_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ \varphi_3(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = A(t)x + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

a) y ist genau dann Lösung der skalaren linearen Differentialgleichung n–ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + ... + a_0\, y = 0$$

mit konstanten Koeffizienten, wenn $x = (y, \dot{y}, ..., y^{(n-1)})$ Lösung der linearen Differentialgleichung erster Ordnung $\dot{x} = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & & \\ 0 & 0 & 1 & ... & \\ & & ... & & \\ 0 & & ... & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & ... & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

ist,

b) das charakteristische Polynom von A ist

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\,\lambda^{n-1} + ... + a_0\,\lambda,$$

c) für eine Nullstelle λ von $p(\lambda)$ ist $y(t) = e^{\lambda t}$ eine Lösung der skalaren Gleichung. Ist λ komplex, so sind $Re(e^{\lambda t})$ und $Im(e^{\lambda t})$ reelle Lösungen der skalaren Gleichung.

d) Finden Sie mit c) eine Basis des Lösungsraums der Gleichung

$$\ddot{y} + y = 0.$$

Aufgabe 4. Sei $A\colon J \to \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ stetig und $F(t)\colon J \to \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine Stammfunktion von A. Zeigen Sie: kommutiert $A(t)$ für alle t mit $F(t)$, so ist

$$\tilde{\Gamma}(t) = e^{F(t)}$$

eine matrixwertige Lösung von

$$\dot{x} = A(t)x.$$

Zeigen Sie, daß dieser Ansatz im Allgemeinen nicht funktioniert, wenn $A(t)$ und $F(t)$ nicht kommutieren.