Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen SS 2018

Einführung in die Funktionentheorie : Übungsblatt 3

Jonas Ziefle 18. Mai 2018

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 1. Juni vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Man zeige, daß jede biholomorphe Abbildung der offenen Einheitskreisscheibe auf sich selbst, die den Nullpunkt festläßt, eine Drehung ist.

Aufgabe 2. Sei $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine *reell analytische* Funktion, d.h., f läßt sich in jedem Punkt von I als Potenzreihe entwickeln. Man zeige, daß es eine holomorphe Funktion $g\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt mit $I = U \cap \mathbb{R}$ und $f = g_{|I}$. Kann man $U = \{z \mid |z| < 1\}$ wählen, wenn $I =]-1, 1[$?

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

i) Die Funktion $f(z) = e^z$ ist überall lokal biholomorph.
ii) Jede lokale Inverse $g(w)$ erfüllt $g'(w) = 1/w$.
iii) Berechnen Sie durch Integration, daß die eindeutige Stammfunktion $l(w)$ von $1/w$ mit $l(1) = 0$ auf dem sternförmigen Gebiet $\mathbb{C}\backslash\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ gegeben ist durch

$$l(w) = \log|w| + i\arg(w),$$

wobei log der reelle Logarithmus ist und $\arg(e^{i\theta}) = \theta$ für $\theta \in]-\pi, \pi[$. (Tip: integrieren Sie erst entlang des Einheitskreises und dann radial...)
iv) Zeigen Sie anhand der obigen Formel und (nochmal) durch Integration, daß man l nicht auf $\mathbb{C}_*$ fortsetzen kann.
v) Berechnen Sie $f \circ l$ und $l \circ f$.
vi) Berechnen Sie das Bild von $\mathbb{C}\backslash\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ unter l.

Die Funktion l nennt man auch den *Hauptzweig des Logarithmus* und bezeichnet sie mit *log*. (Wer alles geschafft hat bekommt hier **4 Bonuspunkte**).

Aufgabe 4. Untersuchen Sie die Art der Singularitäten der Funktionen $\frac{1}{1-e^z}$, $e^{1/z}$ und $\sin(z)/z$ im Punkt $z = 0$. Im Fall einer hebbaren Singularität bestimmen Sie den Funktionswert in $z = 0$. Im Fall eines Poles bestimmen Sie den Hauptteil. Im Fall einer wesentlichen Singularität berechnen Sie das Bild einer beliebig kleinen punktierten ϵ–Scheibe um $z = 0$.