Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen SS 2018

Einführung in die Funktionentheorie : Übungsblatt 4

Jonas Ziefle 8. Juni 2018

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 15. Juni vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Man bestimme die Laurentreihenentwicklungen von

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

in den Gebieten, die durch $0 < |z| < 1$, $1 < |z| < 2$ bzw. $2 < |z|$ beschrieben werden.

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

i) Die *logarithmische Ableitung*

$$\frac{g'(z)}{g(z)}$$

einer holomorphen Funktion $g\colon U \to \mathbb{C}$ hat Pole erster Ordnung an allen Nullstellen und Polstellen von g.

ii) Sei

$$g(z) = e^{f(z)}$$

und $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer isolierten Singularität in $z_0 \in \mathbb{C}\backslash U$. Kann g in z_0 einen Pol haben?

Aufgabe 3. Man bestimme die Automorphismen von $\mathbb{C}$, d.h., die Gruppe der biholomorphen Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$.

Aufgabe 4. Sei $f\colon D\backslash S \to \mathbb{C}$ eine injektive holomorphe Abbildung definiert auf dem Komplement einer diskreten Teilmenge $S \subset D$ der offenen Kreisscheibe $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ohne Häufungspunkt in D. Zeigen Sie:

a) kein Punkt $s \in S$ ist eine wesentliche Singularität von f,
b) ist $s \in S$ ein Pol, so ist die Polordnung gleich eins, und
c) sind alle $s \in S$ hebbare Singularitäten, so ist die Fortsetzung $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine injektive Abbildung.